



Model Matematika

Mengenal alam melalui model

oleh Djoko Luknanto
Jurusan Teknik Sipil dan Lingkungan, FT UGM

Situs:
<http://luk.staff.ugm.ac.id/hidkom/ModelAlamPDB>
<http://luk.staff.ugm.ac.id/hidkom/ModelAlamPDB.swf>
<http://luk.staff.ugm.ac.id/hidkom/ModelAlamPDB.pdf>

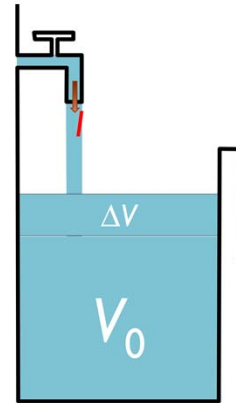
Tujuan Pembelajaran

1. Formulasi kondisi lapangan menjadi sebuah model matematika.
2. Pengenalan kasus yang terjadi di lapangan.
3. Pencarian data pendukung di lapangan.
4. Penyelesaian model matematika untuk menjawab permasalahan lapangan.
5. Tugas bagi peserta didik secara berkelompok dan mandiri.

Renungan bak mandi 😊

Mengisi bak mandi:

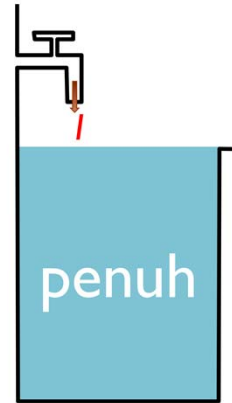
- Volume awal bak mandi V_0 m³
- Dialirkan debit I m³/detik selama Δt detik
- Berapa m³ penambahan volume air (ΔV) dalam bak mandi?
- $\Delta V = ?$
tuliskan jawabannya di kertas anda!



Renungan bak mandi penuh I ☺

Mengisi bak mandi:

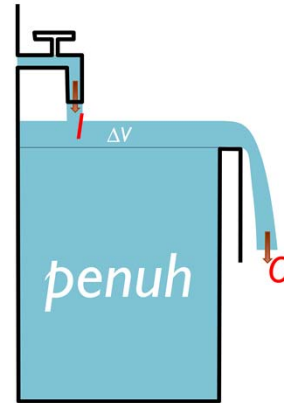
- Pada kondisi awal bak mandi penuh.
- Jika dialirkan debit I m³/detik selama Δt detik
- Apa yang terjadi sesaat berikutnya:
 1. Air di bak langsung tumpah, atau
 2. Permukaan air naik terlebih dahulu, baru kemudian tumpah.
- Tuliskan jawabannya disertai gambar kondisi muka airnya di kertas anda!

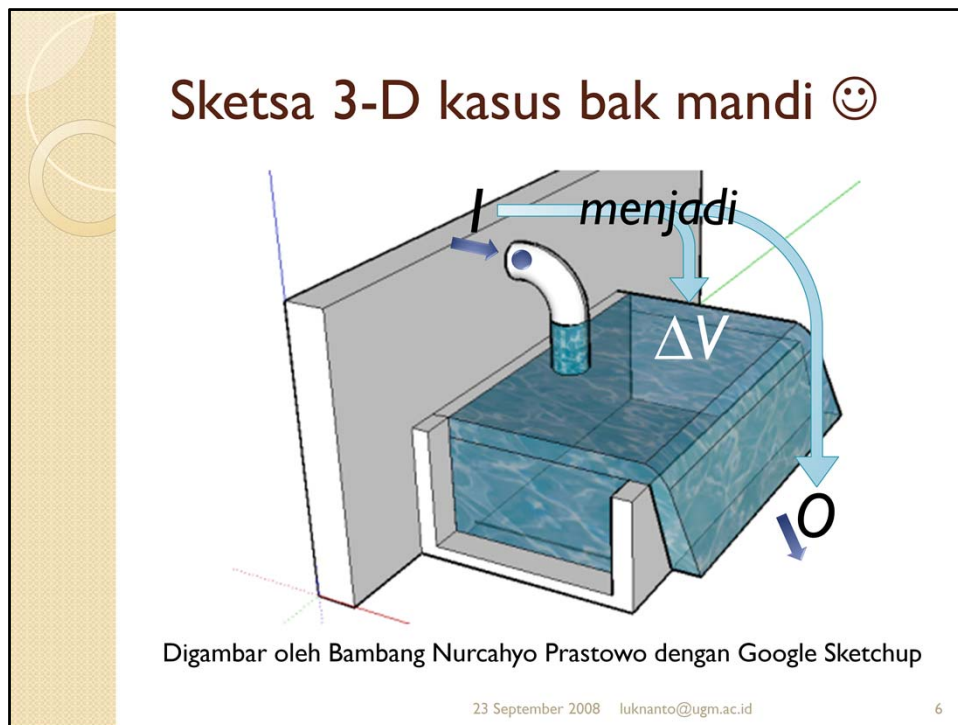


Renungan bak mandi penuh 2 😊

Mengisi bak mandi:

- Pada kondisi awal bak mandi penuh.
- Selama Δt detik dialirkan debit I m³/d
- Muka air akan naik kemudian tumpah dengan debit O m³/d
- Berapa pertambahan volume air dalam bak mandi ΔV m³?
- $\Delta V = ?$
tuliskan jawabannya di kertas anda!





Apa yang kita peroleh?

- Korelasi antara debit masuk (I m³/d), debit keluar (O m³/d), dan perubahan volume (ΔV m³) serta waktu pengaliran (Δt detik)
- Korelasi di atas tidak hanya berlaku untuk bak mandi, namun berlaku untuk setiap reservoir (waduk) → korelasi ini biasa digunakan untuk analisis telusuran banjir di waduk.

Model Matematika Telusuran Waduk

- Model telusuran waduk (*reservoir routing*):

$$\frac{dV}{dt} = I(t) - O(H)$$

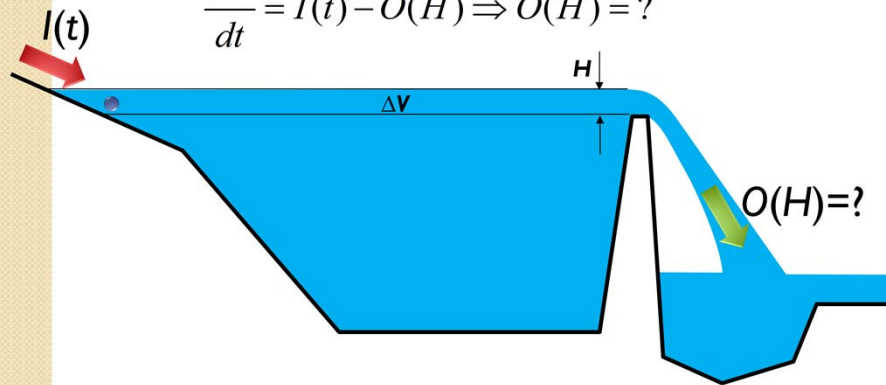
dengan V adalah volume tampungan waduk (m^3), I adalah debit yang masuk (m^3/d), O adalah debit yang keluar (m^3/d), sedangkan t menunjukkan waktu (detik) dan H menunjukkan elevasi muka air (m).

- Bentuk di atas merupakan persamaan diferensial biasa yang harus diselesaikan.

Kasus di waduk

Jika debit banjir (I) masuk waduk,
bagaimana debit (O) keluar waduk?

$$\frac{dV}{dt} = I(t) - O(H) \Rightarrow O(H) = ?$$



23 September 2008 luknanto@ugm.ac.id

9

Contoh Waduk Sermo



23 September 2008 luknanto@ugm.ac.id

10

Hilir Pelimpah Waduk Sermo

pelimpah



23 September 2008 luknanto@ugm.ac.id

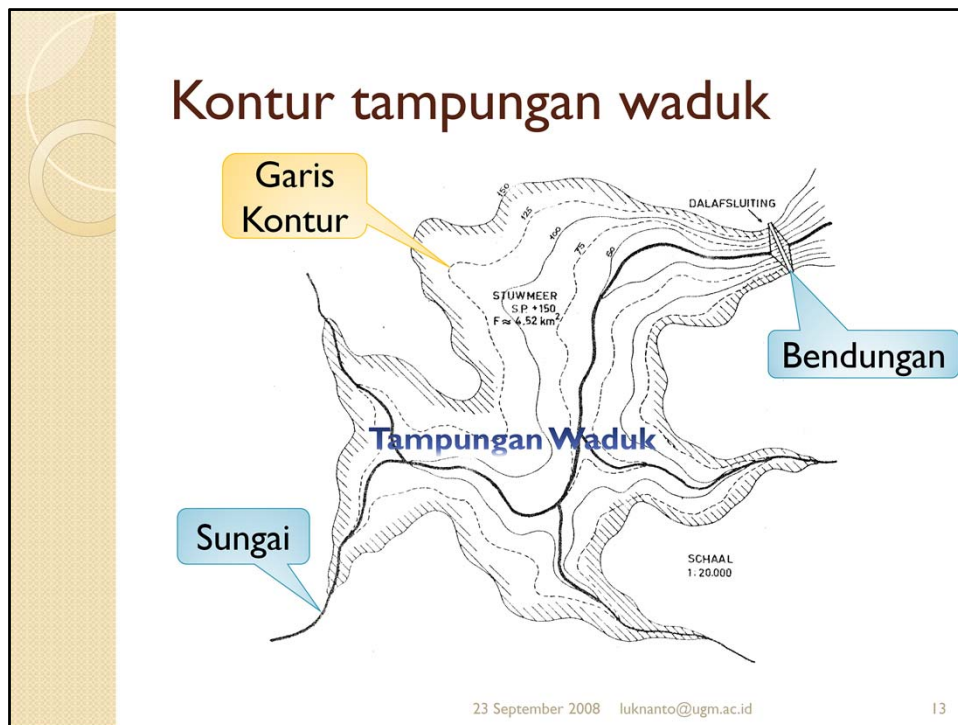
11

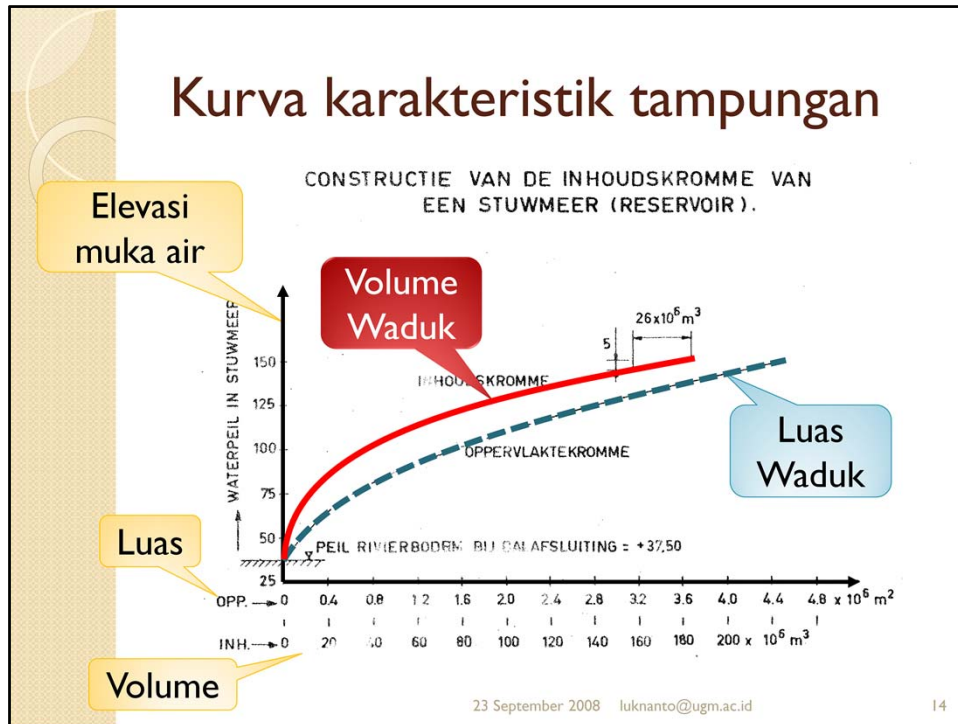
Ambang Pelimpah Waduk Sermo



23 September 2008 luknanto@ugm.ac.id

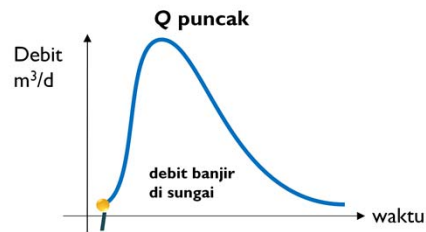
12





Apa yang harus dilakukan?

Terdapat prediksi debit banjir masuk waduk $I(t)$



Luas waduk $A(H)$ diketahui



23 September 2008 luknanto@ugm.ac.id

15

Penyelesaian Persamaan

- Persamaan diferensial ini akan diselesaikan dengan metoda Runge-Kutta

$$\frac{dV}{dt} = I(t) - O(H) \text{ dengan } dV = AdH$$

$$\frac{dH}{dt} = f(t, H) \text{ dengan } f(t, H) = \frac{I(t) - O(H)}{A(H)}$$

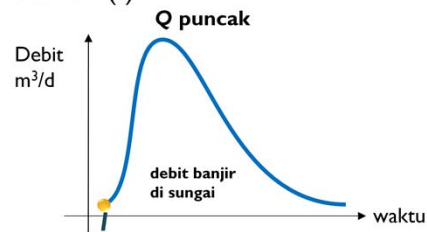
$$H_{t+\Delta t} = H_t + \Delta H$$

Notasi

- t waktu
- H ketinggian air diukur dari mercu pelimpah (tergantung t)
- $I(t)$ banjir masuk (tergantung t)
- $O(H)$ debit pelimpah (tergantung H)
- $A(H)$ luas permukaan waduk (tergantung H)
- V volume waduk (tergantung H)

Data Lapangan

Debit banjir diketahui $I(t)$



Luas waduk $A(H)$ diketahui



23 September 2008 luknanto@ugm.ac.id

18

Runge-Kutta Derajat 3

$$\frac{dH}{dt} = f(t, H) = \frac{I(t) - O(H)}{A(H)}$$

Pada saat $t=0$ d, $H=0$ m, $O=0$ m³/d, diselesaikan dengan tahapan:

$$k_1 = f(t, H_t)$$

$$k_2 = f\left(t + \frac{\Delta t}{3}, H_t + k_1 \frac{\Delta t}{3}\right)$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{2\Delta t}{3}, H_t + k_2 \frac{2\Delta t}{3}\right)$$

$$\Delta H = \frac{\Delta t}{4}(k_1 + 3k_3) \quad H_{t+\Delta t} = H_t + \Delta H$$

$$O(H_{t+\Delta t}) = O(H_t + \Delta H)$$

Runge-Kutta Derajat 4 - Gill

$$\frac{dH}{dt} = f(t, H) = \frac{I(t) - O(H)}{A(H)}$$

Pada saat $t=0$ d, $H=0$ m, $O=0$ m³/d, diselesaikan dengan tahapan:

$$k_1 = f(t, H_t) \quad k_2 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, H_t + k_1 \frac{\Delta t}{2}\right)$$

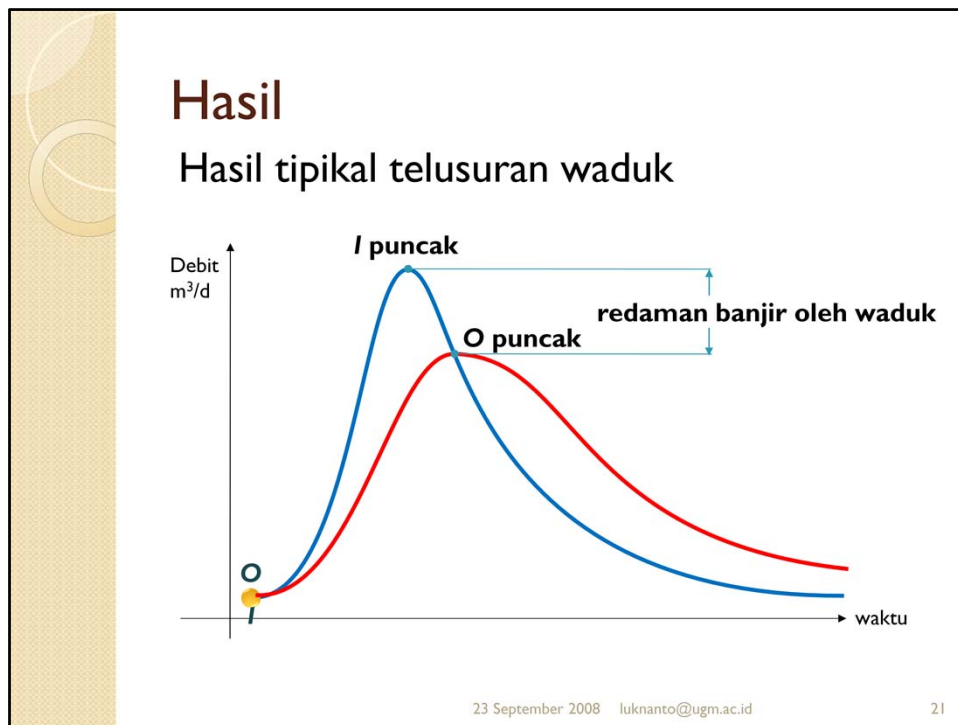
$$H_1 = H_t + \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) k_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) k_2 \right] \Delta t$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, H_1\right) \quad H_2 = H_t + \left[-\frac{1}{2} k_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) k_3 \right] \Delta t$$

$$k_4 = f(t + \Delta t, H_2)$$

$$\Delta H = \frac{\Delta t}{6} \left[k_1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3 + 3k_4 \right]$$

$$O(H_{t+\Delta t}) = O(H_t + \Delta H)$$



Debit banjir keluar waduk

- Debit banjir keluar waduk $O = O(H)$, sedangkan $H = H(t)$, sehingga $O = O(t)$.
- Debit banjir $O(t)$ akan maksimum jika

$$\frac{dO}{dt} = \frac{dO}{dH} \frac{dH}{dt} = \frac{dO}{dH} \frac{I(t) - O(H)}{A(H)} = 0$$

$$I(t) = O(H)$$

Rumus telusuran waduk

sehingga $O(t)$ maksimum terjadi pada lengkung resesi dari banjir masuk waduk.

- Sesuai dengan hasil pada slide sebelumnya.

Runge-Kutta Fehlberg (1/3)

$$\frac{dH}{dt} = f(t, H) = \frac{I(t) - O(H)}{A(H)}$$

Pada saat $t=0$ d, $H=0$ m, $O=0$ m³/d, diselesaikan dengan tahapan:

$$k_1 = f(t, H_t) \quad k_2 = f\left(t + \frac{\Delta t}{4}, H_t + k_1 \frac{\Delta t}{4}\right)$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{3\Delta t}{8}, H_t + (3k_1 + 9k_2) \frac{\Delta t}{32}\right)$$

$$k_4 = f\left(t + \frac{12\Delta t}{13}, H_t + (1932k_1 - 7200k_2 + 7296k_3) \frac{\Delta t}{2197}\right)$$

$$k_5 = f\left(t + \Delta t, H_t + \left(\frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)\Delta t\right)$$

$$k_6 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, H_t + \left(-\frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)\Delta t\right)$$

Runge-Kutta Fehlberg (2/3)

- Derajat 4

$$\Delta H = \Delta t \left(\frac{25}{216} k_1 + \frac{1408}{2565} k_3 + \frac{2197}{4104} k_4 - \frac{1}{5} k_5 \right)$$

- Derajat 5

$$\Delta H = \Delta t \left(\frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right)$$

- Penyelesaian

$$O(H_{t+\Delta t}) = O(H_t + \Delta H)$$

- Estimasi error:

$$E = \Delta t \left(\frac{1}{360} k_1 - \frac{128}{4275} k_3 - \frac{2197}{75240} k_4 + \frac{1}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right)$$

Runge-Kutta Fehlberg (3/3)

- Estimasi error:

$$E = \Delta t \left(\frac{1}{360} k_1 - \frac{128}{4275} k_3 - \frac{2197}{75240} k_4 + \frac{1}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right)$$

- Optimal Δt harus dikalikan dengan s :

$$s = \left(\frac{\varepsilon \Delta t}{2|E|} \right)^{1/4} \approx 0,84 \left(\frac{\varepsilon \Delta t}{|E|} \right)^{1/4}$$

dengan ε adalah toleransi kesalahan,
sehingga:

$$\Delta t_{baru} = s \Delta t$$

Tugas Telusuran Waduk

1. Mencari data hidrologi:
 - Data banjir yang pernah masuk ke sebuah waduk
2. Mencari data bendungan dan waduk:
 - Karakteristik pelimpah: hubungan antara elevasi muka air dengan debit pelimpah
 - Karakteristik waduk
 - a. Hubungan antara elevasi muka air dengan luas genangan.
 - b. Hubungan antara elevasi muka air dengan volume genangan.
3. Lakukan analisis telusuran waduk dengan data di atas.
4. Contoh soal:
<http://luk.staff.ugm.ac.id/hidkom/soal/Runge-Kutta.pdf>

Luaran Pembelajaran

1. Mengenali model matematika sebagai representasi permasalahan di lapangan.
2. Menyelesaikan persamaan diferensial biasa.
3. Melakukan manajemen/pengendalian banjir pada sebuah waduk.