Hidraulika Komputasi
Metoda Beda Hingga

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan
Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada

Penyelesaian Pendekatan

- Karena tidak diperoleh penyelesaian analitis, maka digunakan penyelesaian pendekatan numeris.
- Digunakan penyelesaian pendekatan numerik dengan *metoda beda hingga*.
- Untuk dapat menggunakan *metoda beda hingga*, maka domain dari persamaan dasar harus di-*diskrit*-kan.

Diskrit versus Kontinu

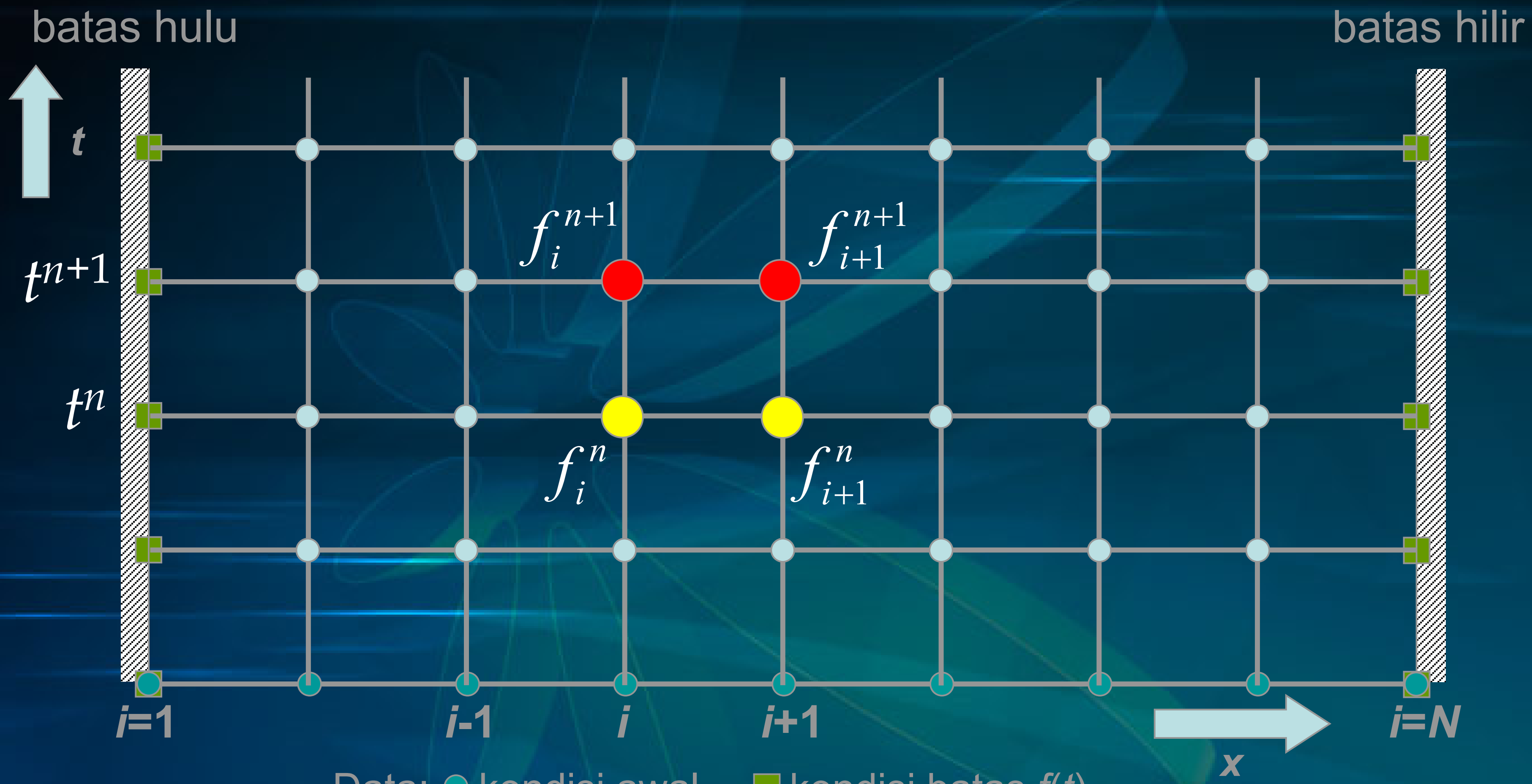
- Banyak permasalahan lapangan yang sebenarnya kontinu, namun harus dijadikan diskrit karena kondisi lapangan:
  - *Q* sungai adalah kontinu dari satu lokasi ke lokasi yang lain, namun
  - jika kita melakukan pengukuran, maka lokasi pengukuran tidak dapat kontinu sepanjang sungai, tetapi hanya dilakukan di titik-titik tertentu, karena keterbatasan dana dan kemampuan pelaksanaan.

Diskritisasi Kondisi Alam

- sungai alami yang menjadi domain model harus di-*diskrit*-kan menjadi beberapa *node*,
- pada setiap *node* dibutuhkan data geometri lengkap.

penyelesaian persamaan kerja/dasar yang berlaku hanya diperoleh di lokasi-lokasi (*node*) yang telah dipilih terlebih dahulu.

Kisi beda hingga *x-t*



Data: kondisi awal; kondisi batas $f(t)$

Dihitung: titik interior; titik tinjauan – sudah dihitung (t_n); titik tinjauan – akan dihitung (t_{n+1})

Persamaan hidrodinamika sungai

- Pada penggal sungai normal, sungai dimodelkan dengan persamaan matematis:
  - Konservasi massa

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q_\ell$$

  - Konservasi momentum

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{Q^2}{A}\right) + gA\left(\frac{\partial y}{\partial x} + S_f\right) = 0$$

Aplikasi pada Kisi Beda Hingga

- Pada kisi beda hingga persamaan matematis menjadi:
  - Konservasi massa untuk titik *i*

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_i + \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_i = \left. q_\ell \right|_i$$

  - Konservasi momentum untuk titik *i*

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_i + \left.\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{Q^2}{A}\right)\right|_i + \left. gA\left(\frac{\partial y}{\partial x} + S_f\right)\right|_i = 0$$

Definisi-definisi Beda Hingga

- Metoda beda hingga akan mendefinisikan bagaimana suku-suku dalam persamaan kerja harus ditulis:

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_i = ? \qquad \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_i = ? \qquad \left.q_\ell\right|_i = ?$$

Deret Taylor - Ruang

- Deret Taylor digunakan untuk memprediksi/ menghitung nilai sebuah fungsi/parameter/variabel di sebuah lokasi jika nilai fungsi/parameter/variabel tersebut di lokasi yang berdekatan telah diketahui.

nilai derivatif yang akan digunakan

$$\boxed{f(x_i+\Delta x)} = \boxed{f(x_i)} + \frac{(\Delta x)^1}{1!}\boxed{f^{(1)}(x_i)} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f^{(2)}(x_i) + \ldots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_i) + \ldots$$

nilai fungsi /parameter/variabel yang telah diketahui

nilai fungsi/parameter/variabel yang dicari

Deret Taylor - Waktu

- Untuk variabel waktu, maka Deret Taylor dapat ditulis sebagai:

nilai derivatif yang akan digunakan

$$\boxed{f(t_n+\Delta t)} = \boxed{f(t_n)} + \frac{(\Delta t)^1}{1!}\boxed{f^{(1)}(t_n)} + \frac{(\Delta t)^2}{2!}f^{(2)}(t_n) + \ldots + \frac{(\Delta t)^n}{n!}f^{(n)}(t_n) + \ldots$$

nilai fungsi yang telah diketahui

nilai fungsi yang dicari

Penjabaran Skema Maju

- Dijabarkan dari Deret Taylor

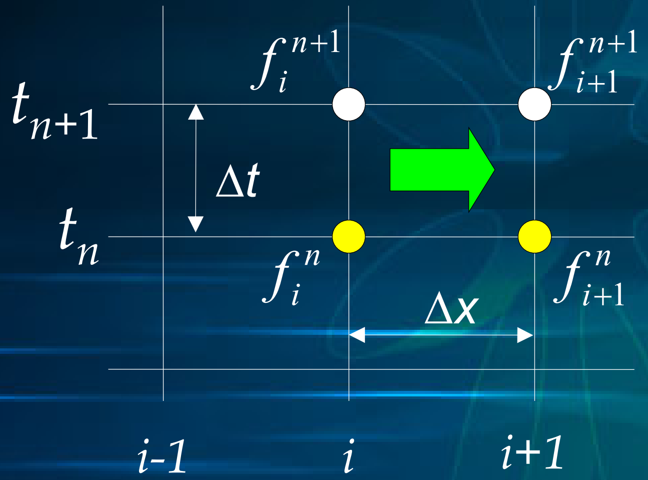
$$f^{(1)}(x_i) = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i)$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right]_{x=x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \underbrace{\frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i)}_{\text{derajad satu}}$$

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right]_{x=x_i} = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x}}$$

Skema Maju - Ruang

- Beda hingga terhadap ruang



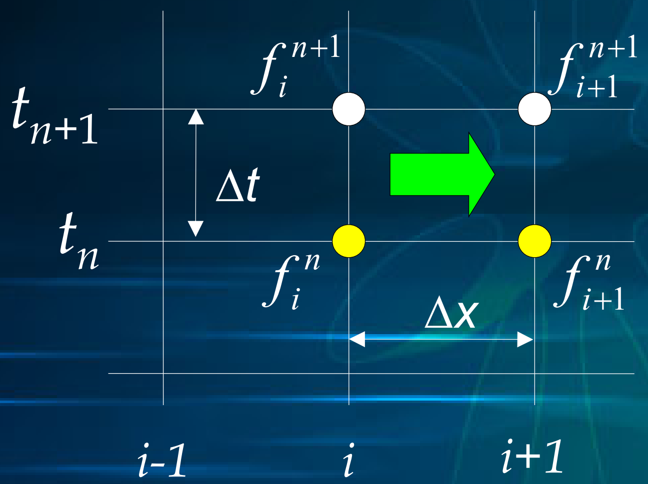
$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x}$$

Skema Maju - Waktu

- Beda hingga terhadap waktu



$$\Delta t = t^{n+1} - t^n$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t}$$

Penjabaran Skema Mundur

- Dijabarkan dari Deret Taylor

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \frac{(\Delta x)^1}{1!} f^{(1)}(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f^{(2)}(x_i)$$

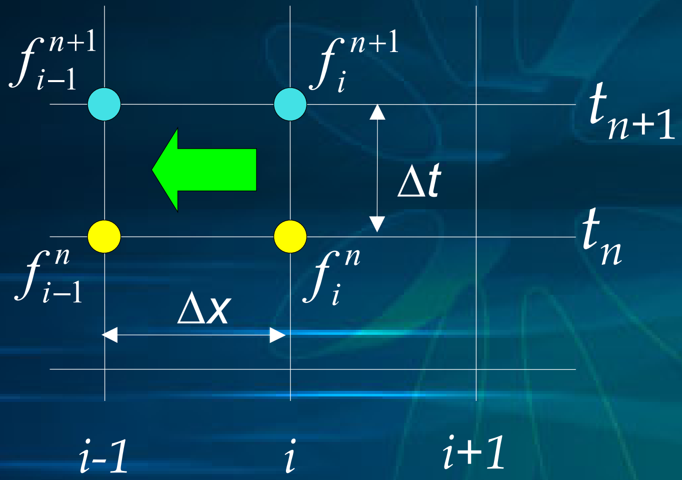
menjadi $$f^{(1)}(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i)$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right]_{x=x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + \underbrace{\frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i)}_{\text{derajad satu}}$$

$$\boxed{\left.\frac{df}{dx}\right]_{x=x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}}$$

Skema Mundur - Ruang

- Beda hingga terhadap ruang



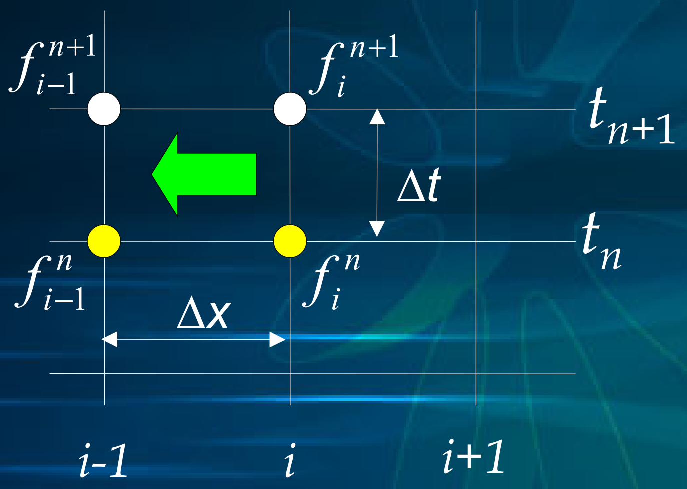
$$\Delta x = x_i - x_{i-1}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}$$

Skema Mundur - Waktu

- Beda hingga terhadap waktu



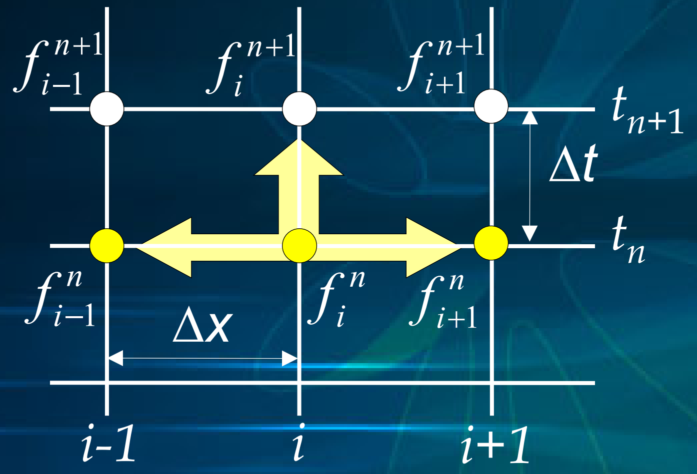
$$\Delta t = t^{n+1} - t^n$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{i-1} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^n}{\Delta t}$$

Skema Tengah - Ruang

- Beda hingga terhadap ruang



$$\Delta x = x_i - x_{i-1}$$
$$= x_{i+1} - x_i$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_{i+1}^{n} - f_{i-1}^{n}}{2\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

Skema Tengah - Ruang

- Beda hingga terhadap ruang derivasi kedua

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\text{maju}} - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\text{mundur}}}{\Delta x} = \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x}$$

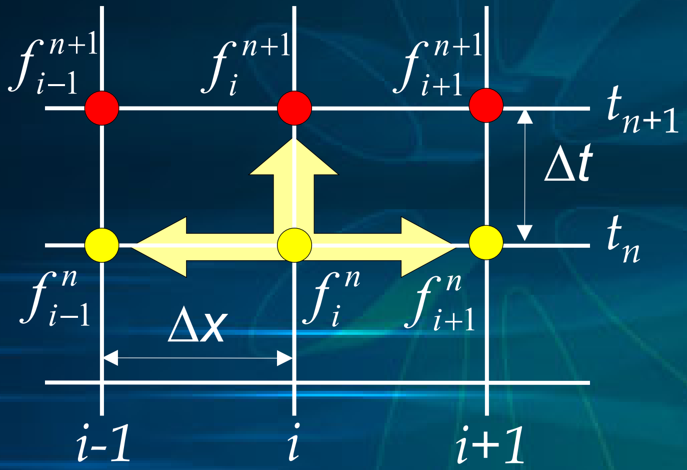
$$= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

untuk t^n dan t^{n+1} menjadi

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \qquad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}$$

Skema Tengah - Waktu

- Beda hingga terhadap waktu



$$\Delta t = t^{n+1} - t^n$$

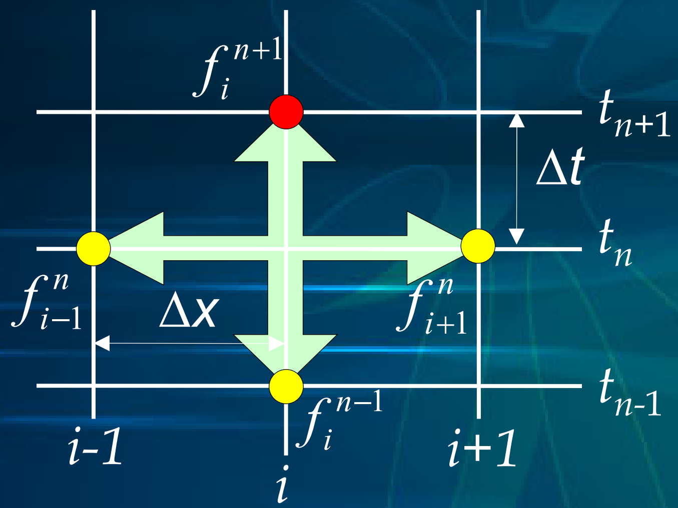
$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{i-1} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^{n}}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{i} = \frac{f_{i}^{n+1} - f_{i}^{n}}{\Delta t}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^{n}}{\Delta t}$$

Skema Lompat Katak

- Beda hingga terhadap ruang dan waktu

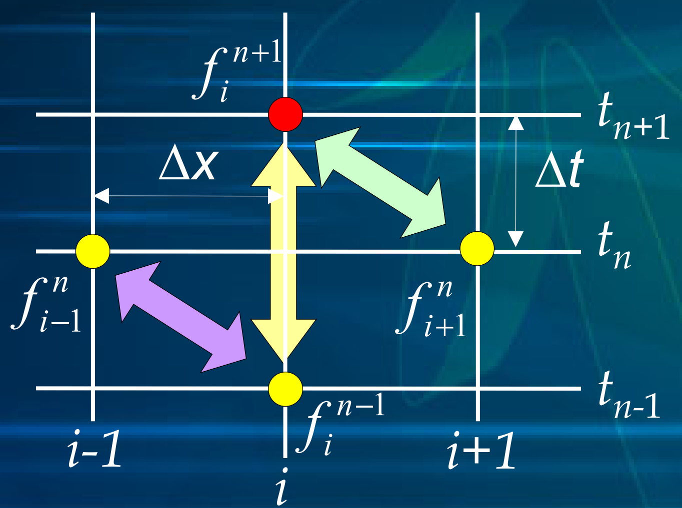


$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

Skema DuFort Frenkel

- Skema ini menggunakan beberapa parameter dari waktu yang lalu (t^{n-1}), waktu sekarang (t^n) dan diskritisasi waktu yang akan datang (t^{n+1}) dengan kombinasi ruang yang agak rumit.



$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_i^{n+1} - f_i^{n-1} + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

Skema Crank Nicolson

- Skema ini menggunakan teknik pembobotan untuk diskritisasi waktu sekarang (t^n) dan diskritisasi waktu yang akan datang (t^{n+1}) dengan cara yang lebih fleksibel yaitu dengan menggunakan *faktor pemberat waktu* ($0 \leq \theta \leq 1$).

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \theta\left(\frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2}\right) + (1-\theta)\left(\frac{f_{i+1}^{n} - 2f_i^{n} + f_{i-1}^{n}}{(\Delta x)^2}\right)$$

- Beda hingga terhadap waktu:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

Persamaan Adveksi-Dispersi

Persamaan Asli (*Governing Equation*)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Persamaan kerja dengan metoda beda hingga

$$\left\{(1-\psi)\frac{C_{i-1}^{n+1} - C_{i-1}^{n}}{\Delta t} + \psi\frac{C_{i}^{n+1} - C_{i}^{n}}{\Delta t}\right\} + U\left\{(1-\theta)\frac{C_{i}^{n} - C_{i-1}^{n}}{\Delta x} + \theta\frac{C_{i}^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}\right\} =$$

$$D\left\{(1-\theta)\frac{C_{i+1}^{n} - 2C_{i}^{n} + C_{i-1}^{n}}{\Delta x^2} + \theta\frac{C_{i+1}^{n+1} - 2C_{i}^{n+1} + C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2}\right\}$$

Persamaan Kerja

Bentuk Umum

$$aC_{i-1}^{n+1} + bC_i^{n+1} + cC_{i+1}^{n+1} = pC_{i-1}^{n} + qC_i^{n} + rC_{i+1}^{n}$$

dengan

$$a = (1-\psi) - \theta Cr - c \qquad b = \psi + \theta Cr + 2c \qquad c = -\frac{\theta D \Delta t}{\Delta x^2}$$

$$p = (1-\psi) + (1-\theta)Cr + r \qquad q = \psi - (1-\theta)Cr - 2r \qquad r = \frac{(1-\theta)D\Delta t}{\Delta x^2}$$

Skema-skema lain

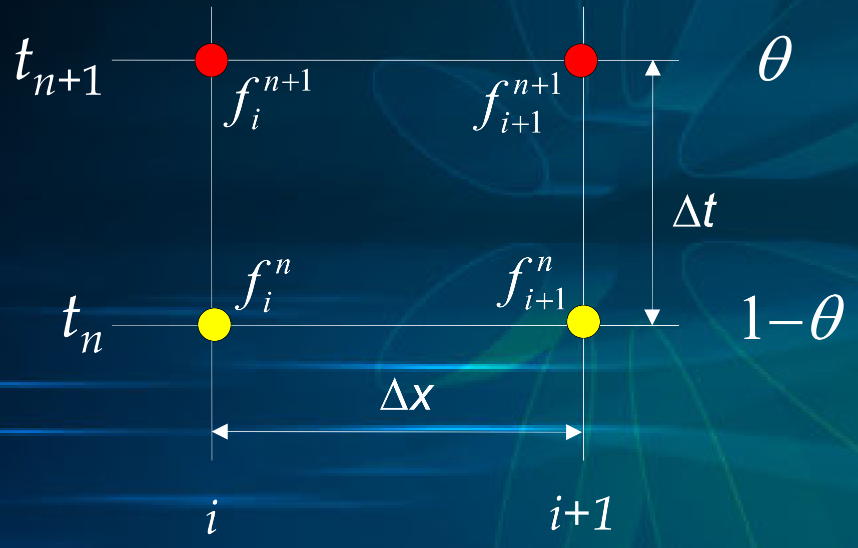
- Untuk menyelesaikan permasalahan hidrodinamika dan angkutan limbah di sungai telah banyak dikembangkan skema-skema beda hingga yang handal.
- Salah satu diantaranya adalah *Skema Empat Titik Preissmann*.
- Skema beda hingga yang lain tidak dijelaskan dalam tayangan ini.

Skema Empat Titik Preissmann

- Salah satu skema beda hingga yang populer untuk menyelesaikan problem sungai di lapangan adalah *Skema Empat Titik Preissmann*.
- Untuk menghitung nilai suatu variabel di titik-titik hitung sepanjang sungai Preissmann menggunakan empat buah titik untuk menghitung setiap suku pembentuk persamaan dasar aliran tak tunak di sungai.

Skema 4 Titik Preissmann

- Empat titik yang digunakan



● titik tinjauan – akan dihitung

● titik tinjauan – sudah dihitung

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta f_i$$

$$\Delta x = x_{i+1} - x_i$$

$$\Delta t = t^{n+1} - t^n$$

- $0 \le \theta \le 1$ disebut dengan faktor pemberat waktu ($\theta = 1$ untuk skema implisit, sedangkan $\theta = 0$ untuk skema eksplisit)

Skema Preissmann

- Nilai fungsi dihitung dengan cara:

$$f\left(x,t\right)=\theta\left(\frac{f_i^{n+1}+f_{i+1}^{n+1}}{2}\right)+\left(1-\theta\right)\left(\frac{f_i^n+f_{i+1}^n}{2}\right)$$

$$=\frac{\theta}{2}\left(f_i^n+\Delta f_i+f_{i+1}^n+\Delta f_{i+1}\right)+\frac{1-\theta}{2}\left(f_i^n+f_{i+1}^n\right)$$

$$=\frac{\theta}{2}\left(\Delta f_i+\Delta f_{i+1}\right)+\frac{1}{2}\left(f_i^n+f_{i+1}^n\right)$$

misal untuk nilai Q

$$Q(x,t)=\frac{\theta}{2}\left(\Delta Q_i+\Delta Q_{i+1}\right)+\frac{1}{2}\left(Q_i^n+Q_{i+1}^n\right)$$

Skema Preissmann

- Beda hingga terhadap ruang:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \theta\left(\frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x}\right) + (1-\theta)\left(\frac{f_{i+1}^{n} - f_i^{n}}{\Delta x}\right)$$

$$= \frac{\theta}{\Delta x}\left(f_{i+1}^{n} + \Delta f_{i+1} - f_i^{n} - \Delta f_i\right) + \frac{1-\theta}{\Delta x}\left(f_{i+1}^{n} - f_i^{n}\right)$$

$$= \frac{\theta}{\Delta x}\left(\Delta f_{i+1} - \Delta f_i\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(f_{i+1}^{n} - f_i^{n}\right)$$

misal untuk nilai Q

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\theta}{\Delta x}\left(\Delta Q_{i+1} - \Delta Q_i\right) + \frac{1}{\Delta x}\left(Q_{i+1}^{n} - Q_i^{n}\right)$$

Skema Preissmann

- Beda hingga terhadap waktu:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t}\left(f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^{n}\right) + \frac{1}{2\Delta t}\left(f_{i}^{n+1} - f_{i}^{n}\right)$$

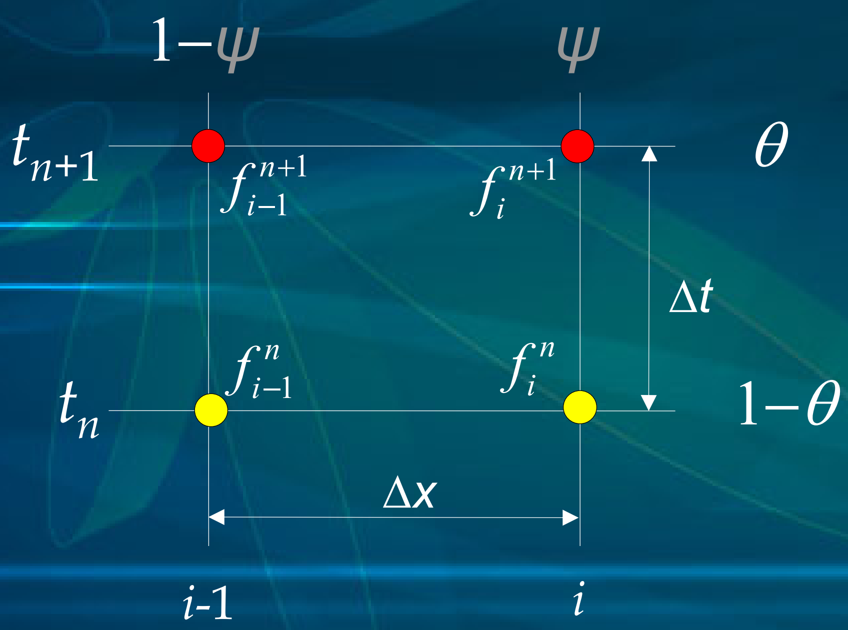
$$= \frac{1}{2\Delta t}\Delta f_{i+1} + \frac{1}{2\Delta t}\Delta f_{i}$$

misal untuk nilai *A*

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{2\Delta t}\Delta A_{i+1} + \frac{1}{2\Delta t}\Delta A_{i}$$

Pembobotan Waktu dan Ruang

- Ide dari skema Crank-Nicolson dengan $0 \leq \theta \leq 1$ sebagai 'faktor pemberat waktu,' dapat dikembangkan secara umum untuk 'faktor pemberat ruang' dengan simbol $0 \leq \psi \leq 1$.



Contoh pembobotan Skema Mundur

- Pembobotan terhadap waktu:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = (1-\theta)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i^n + \theta\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i^{n+1} = (1-\theta)\frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} + \theta\frac{f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}$$

- Pembobotan terhadap ruang:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (1-\psi)\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{i-1} + \psi\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_i = (1-\psi)\frac{f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^n}{\Delta t} + \psi\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

Skema Eksplisit-Implisit

- Untuk aplikasi pembobotan terhadap waktu dikenal tiga jenis skema yaitu
  1. Skema Eksplisit yaitu skema pembobotan waktu dengan nilai θ = 0,
  2. Skema Implisit yaitu skema pembobotan waktu dengan nilai θ = 1,
  3. Skema Eksplisit-Implisit yaitu skema pembobotan waktu dengan nilai $0 < \theta < 1$.

Skema Mundur - Eksplisit

Persamaan angkutan limbah adveksi murni:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

Penyelesaian eksplisit dengan Skema Mudur

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + U\frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_i^{n+1} &= C_i^n - \frac{U\Delta t}{\Delta x}\left(C_i^n - C_{i-1}^n\right) \\ &= C_i^n - Cr\left(C_i^n - C_{i-1}^n\right) \\ C_i^{n+1} &= (1 - Cr)C_i^n + Cr\,C_{i-1}^n \end{aligned}$$

persamaan di atas berlaku untuk: *i* dari ? sampai ?

Skema Mundur - Implisit

Persamaan angkutan limbah adveksi murni:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

Penyelesaian eksplisit dengan Skema Mundur

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + U\frac{C_i^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_i^{n+1} + \frac{U\Delta t}{\Delta x}\left(C_i^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}\right) = C_i^n$$

$$(1 + Cr)C_i^{n+1} - CrC_{i-1}^{n+1} = C_i^n$$

persamaan di atas berlaku untuk: *i* dari ? sampai ?

Skema Mundur: Eksplisit-Implisit

- Persamaan angkutan limbah adveksi murni:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

- Penyelesaian eksplisit-implisit dengan Skema Mudur

$$\left\{ (1-\psi) \frac{C_{i-1}^{n+1} - C_{i-1}^{n}}{\Delta t} + \psi \frac{C_{i}^{n+1} - C_{i}^{n}}{\Delta t} \right\} +$$

$$U \left\{ (1-\theta) \frac{C_{i}^{n} - C_{i-1}^{n}}{\Delta x} + \theta \frac{C_{i}^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right\} = 0$$