

MODEL MATEMATIKA



oleh
Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
Februari 2003

*Bahan kuliah Hidraulika Komputasi
Jurusan Teknik Sipil FT UGM
Yogyakarta*

PRAKATA

Buku ini disusun dengan tujuan memberikan pengenalan terhadap model matematik; terutama model matematik numeris dengan metode diferensi hingga.

Pada bab pertama dibahas mengenai pengertian model secara umum untuk kemudian pembaca diarahkan kepada model matematik numeris diferensi hingga.

Pada bab kedua disajikan jenis-jenis persamaan diferensial, persamaan beda hingga serta skema-skema diferensi hingga yang banyak dijumpai pada bidang hidraulika.

Pada bab ketiga dijelaskan persamaan dasar dan persamaan kerja dari aliran tak tunak untuk saluran/sungai tunggal atau jaringan saluran/sungai.

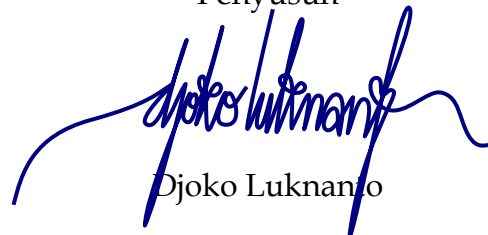
Untuk terbitan pertama ini pada bulan Februari 1993, bahan yang tercantum dalam buku ini ditujukan untuk pemberian dasar-dasar model matematik numeris kepada peserta kursus singkat "Pengembangan Daerah Rawa." Kursus ini diselenggarakan oleh PAU Ilmu Teknik, UGM. Lama kursus singkat seluruhnya adalah 40 jam, sedangkan bahan yang tercantum dalam buku ini akan diberikan selama 4 jam.

Dalam terbitan kedua dan selanjutnya, buku ini digunakan untuk mengajar dasar-dasar Hidraulika Komputasi pada Program Pascasarjana Reguler dan MPBA (Magister Pengelolaan Bencana Alam) di Jurusan Teknik Sipil FT UGM.

Penyusun berharap agar bahan kursus ini berguna. Kritik membangun selalu diharapkan.

Yogyakarta, Februari 2003

Penyusun



Djoko Lukman

DAFTAR ISI

	halaman
HALAMAN JUDUL	i
PRAKATA.....	ii
DAFTAR ISI.....	iii
PENDAHULUAN.....	2
Pengertian Model	2
Model kecepatan aliran saluran terbuka	2
Model angkutan limbah.....	2
Model penelusuran waduk ('reservoir routing')	3
Model aliran tak tunak ('unsteady flow') pada saluran terbuka	3
a. Persamaan kontinuitas.....	3
b. Persamaan momentum.....	3
Penyelesaian Analitis	4
Penyelesaian Numeris	5
PERSAMAAN DIFERENSIAL.....	7
Bentuk-bentuk Persamaan Diferensial.....	7
Metoda Karakteristik	8
Konservasi massa aliran saluran terbuka	9
Konservasi momentum aliran saluran terbuka	11
Diskritisasi Keadaan Alam.....	15
Skema-skema Diferensi Hingga	17
Deret Taylor	17
Skema Maju.....	17
Skema Mundur.....	18
Skema Tengah.....	19
Skema Loncat-Katak (Leap-frog).....	20
Skema DuFort-Frankel	21
Skema Crank-Nicolson.....	22
Skema Empat Titik Preissmann	22
Faktor Bobot Waktu dan Ruang	22
Skema Eksplisit	23

Skema Implisit.....	24
ALIRAN 1-D TAK TUNAK PADA SUNGAI.....	25
Cara non-iterasi Preissmann.....	25
Skema Empat Titik Preissmann.....	25
Persamaan kerja beda hingga.....	26
Persamaan kontinuitas.....	26
Persamaan momentum.....	27
SUNGAI TUNGGAL.....	31
Metode 'Sapuan-Ganda'.....	31
Kondisi Awal.....	32
Kondisi Batas.....	34
JARINGAN SUNGAI.....	35
Nodal Continuity.....	35
River-flow dynamics.....	37
Governing Equation: Momentum.....	37
Governing Equation: Continuity.....	37
Working Equation.....	37
The Double Sweep Method.....	37
Forward Sweep.....	37
Derivation of Equation (I-1).....	40
Derivation of Equation (I-2).....	41
Return Sweep to calculate discharge correction.....	42
DAFTAR PUSTAKA.....	43

PENDAHULUAN

Pengertian Model

Secara umum pengertian model adalah suatu usaha untuk menciptakan suatu replika/tiruan dari suatu fenomena/peristiwa alam. Ada tiga jenis model yaitu model fisik, model analogi dan model matematik.

Pada model fisik replika/tiruan tersebut dilaksanakan dengan menirukan domain/ruang/daerah dimana fenomena/peristiwa alam itu terjadi. Tiruan domain ini dapat lebih besar atau lebih kecil dibandingkan dengan domain aslinya di lapangan/alam. Kecocokan dari model ini tergantung dari seberapa mungkin kesebangunan (geometris, kinematis, dan dinamis) di alam dapat ditirukan dalam model. Contoh: model bendung, model bangunan pelimpah, model karburator.

Pada model analogi replika/tiruan tersebut dilaksanakan dengan menganalogikan fenomena/peristiwa alam dengan fenomena/peristiwa alam yang lain untuk kemudian dibuat model fisiknya. Contoh: peristiwa aliran air tanah di bawah bendung ditirukan dengan model yang menggunakan arus listrik.

Pada model matematik replika/tiruan tersebut dilaksanakan dengan mendiskripsikan fenomena/peristiwa alam dengan satu set persamaan. Kecocokan model terhadap fenomena/peristiwa alamnya tergantung dari ketepatan formulasi persamaan matematis dalam mendiskripsikan fenomena/peristiwa alam yang ditirukan. Contoh:

Model kecepatan aliran saluran terbuka

$$V = \frac{1}{n} R^{2/3} S^{1/2} \quad (1.1)$$

dengan V adalah kecepatan, n adalah koefisien kekasaran Manning, R adalah radius hidraulik, dan S adalah kemiringan garis energi.

Model angkutan limbah

$$A \frac{\partial c}{\partial t} + AU \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(AD \frac{\partial c}{\partial x} \right) \quad (1.2)$$

dengan A adalah luas tampang basah sungai, C adalah konsentrasi limbah, t menunjukkan waktu, U adalah kecepatan rerata tampang lintang sungai, x adalah jarak, dan D adalah koefisien dispersi.

Model penelusuran waduk ('reservoir routing')

$$\frac{dy}{dx} = I(t) - O(h) \quad (1.3)$$

dengan V adalah volume tampungan waduk, I adalah debit yang masuk, O adalah debit yang keluar, sedangkan t menunjukkan waktu dan h menunjukkan elevasi muka air.

Model aliran tak tunak ('unsteady flow') pada saluran terbuka

a. Persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q_\ell \quad (1.4)$$

dengan Q adalah debit aliran (m^3/detik), x adalah jarak memanjang sungai, A adalah luas tampang basah (m^2), t menunjukkan waktu dalam detik, dan q_ℓ adalah debit lateral dari samping kiri dan kanan sungai ($\text{m}^3/\text{detik}/\text{m}$).

b. Persamaan momentum

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial y}{\partial x} + S_f \right) &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + 2\alpha \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \alpha \left(\frac{Q}{A} \right)^2 \frac{\partial A}{\partial x} + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gAS_f &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

dengan α adalah koefisien koreksi kecepatan rerata tampang basah (= koefisien Coriolis), g adalah percepatan gravitasi (m/detik^2), S_f adalah kemiringan garis energi, y adalah elevasi muka air (m).

Pada bahan pelatihan ini, selanjutnya model fisik dan model analogi tidak akan dibahas, tetapi pembaca akan diantar kedalam suatu pembahasan menuju model matematis.

Dalam suatu model matematik, untuk mengetahui unjuk kerja dari model, maka harus dicari/dihitung persamaan-persamaan pembentuk model tersebut. Penyelesaian yang dicari dapat berupa penyelesaian analitis maupun numeris. Penyelesaian numeris adalah penyelesaian akhir yang paling diharapkan, tetapi banyak problem di lapangan yang tidak didapatkan penyelesaian analitisnya karena kompleksnya permasalahan yang dihadapi. Jika suatu permasalahan tidak dapat diselesaikan secara numeris, maka manusia tetap berusaha untuk mendapatkan penyelesaiannya secara numeris. Penyelesaian analitis biasanya bersifat menerus untuk seluruh domain, sedangkan penyelesaian numeris bersifat diskrit; hanya berlaku pada titik-titik hitungan saja. Penjelasan lebih lanjut tentang kedua penyelesaian ini diberikan pada bab berikut.

Penyelesaian Analitis

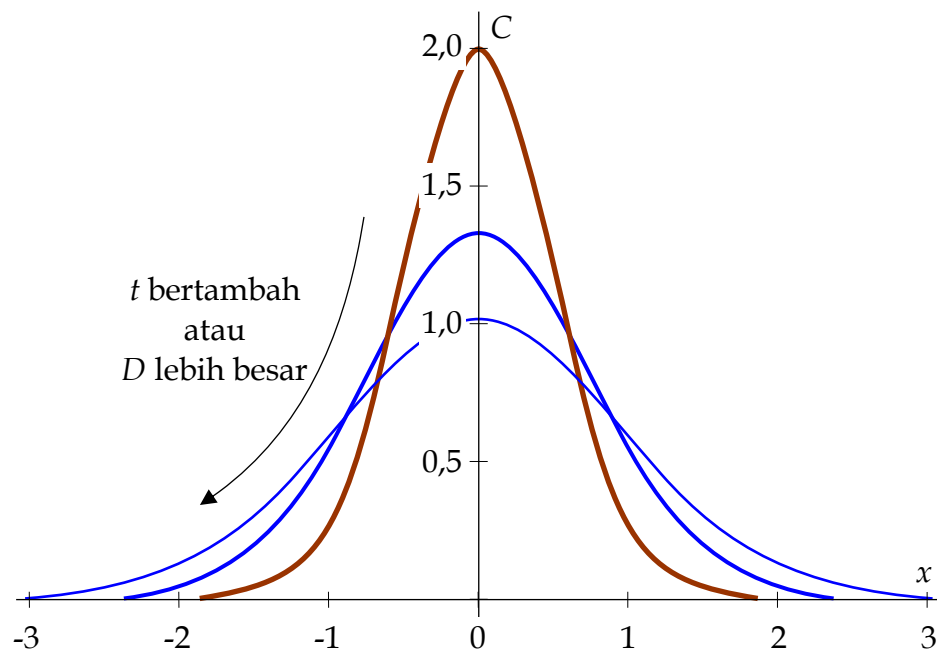
Penyelesaian analitis dari suatu model matematis adalah penyelesaian yang didapat dari manipulasi aljabar terhadap persamaan dasar sehingga didapat suatu penyelesaian yang berlaku untuk setiap titik dalam domain yang menjadi perhatian. Sebagai contoh adalah angkutan limbah satu dimensi yang mempunyai persamaan dasar, Pers.(1.2), untuk tampang sungai yang seragam sehingga kecepatan rerata, U , menjadi konstan serta koefisien dispersi, D , mempunyai nilai konstan pada domain penyelesaian, maka persamaan dasar berubah menjadi

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

Pers.(1.6) pada domain yang tak ada batasnya mempunyai penyelesaian analitis sebagai berikut:

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x-Ut)^2}{4Dt}\right) \quad (1.7)$$

dengan M adalah massa limbah pada waktu t_0 dan $x=0$. Pers.(1.7) merupakan persamaan distribusi normal, seperti disajikan pada Gambar 1.1.



Gambar 1. Penyelesaian analitis persamaan Pers.(1.6)

Pada Gambar 1 ini disajikan distribusi konsentrasi (C) sebagai fungsi dari lokasi (x) untuk kasus (i) nilai koefisien dispersi (D) konstan, pada waktu (t) yang berlainan, atau (ii) pada waktu yang bersamaan, namun nilai koefisien dispersi (D) berlainan.

Penyelesaian Numeris

Jika dalam persamaan dasar angkutan limbah, Pers.(1.6), ternyata kecepatan rerata berubah sepanjang sungai atau saluran, maka penyelesaian analitis, Pers.(1.7), tidak berlaku lagi. Pada permasalahan ini tidak didapat penyelesaian analitisnya. Untuk menyelesaikan permasalahan ini maka biasanya digunakan penyelesaian numeris dimana persamaan dasar, Pers.(1.2), diubah menjadi persamaan yang hanya berlaku pada titik-titik tertentu didalam domain penyelesaian. Pengubahan persamaan dasar tersebut dapat menggunakan metode elemen hingga ('finite element') maupun beda hingga ('finite difference').

Pada pembahasan selanjutnya hanya dijelaskan pemakaian metode beda hingga untuk mengubah persamaan-persamaan dasar. Pemilihan ini berdasarkan pertimbangan bahwa permasalahan yang akan dibahas adalah permasalahan satu dimensi atau permasalahan yang dapat diubah kedalam permasalahan satu dimensi, sehingga metode elemen hingga masih belum menunjukkan

kelebihannya dibandingkan metode beda hingga. Selain itu konsep metode beda hingga lebih dahulu dikenal manusia, segala sesuatu yang berhubungan dengan sifat matematisnya telah benar-benar diteliti dan dipahami, sehingga memudahkan pengenalannya.

PERSAMAAN DIFERENSIAL

Dalam bab ini akan dijelaskan metode beda hingga secara umum. Bab ini dimulai dari klasifikasi persamaan diferensial, kemudian penjelasan mengenai metode karakteristik yang mempunyai kekhususan tersendiri sehingga dibahas dibagian depan. Cara diskritisasi keadaan di lapangan dijelaskan pada bab berikutnya, kemudian diikuti dengan penjelasan berbagai macam skema beda hingga.

Bentuk-bentuk Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial partial linier order dua yang seringkali dijumpai di lapangan biasanya dibagi menjadi tiga jenis yaitu eliptik, hiperbolik dan parabolik. Bentuk umum dari persamaan diferensial ini adalah sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^N A_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^N B_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + Cf + D = 0 \quad (2.1)$$

dengan koefisien A_i dihitung pada titik $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N)$ bernilai 1, -1, atau 0. Pada Pers.(2.1), f adalah besaran yang dicari dan x_i adalah besaran bebas. Catatan: dalam Pers.(2.1) tidak terdapat suku $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Pembagian persamaan diferensial, Pers.(2.1), menjadi tiga jenis harus memenuhi syarat sebagai berikut:

1. Jika seluruh koefisien A_i mempunyai nilai tidak nol dan bertanda sama, maka persamaan diferensial ini adalah *eliptik*.

Contoh: aliran air tanah tunak:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2)$$

dengan h adalah tinggi tekanan air tanah, x dan y adalah jarak lintang dan panjang.

2. Jika seluruh koefisien A_i mempunyai nilai tidak nol dan bertanda sama kecuali hanya satu koefisien, maka persamaan diferensial ini adalah *hiperbolik*.

Contoh: gelombang dua dimensi:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (2.3)$$

dengan h adalah tinggi gelombang, t menunjukkan waktu.

3. Jika satu koefisien A_i (misal A_j) bernilai nol dan yang lainnya mempunyai nilai tidak nol dan bertanda sama, dan jika koefisien B_j mempunyai nilai tidak nol, maka persamaan diferensial ini adalah *parabolik*.

Contoh: aliran air tanah tak tunak:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.4)$$

dengan h adalah tinggi tekanan air tanah.

Metoda Karakteristik

Dalam model matematik metode karakteristik seringkali dijumpai, sehingga pembahasannya diletakkan didepan. Metode ini pada prinsipnya adalah melakukan perubahan bentuk persamaan dasar dari persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa, sehingga didapat keuntungan bahwa integrasi persamaan dasarnya menjadi lebih mudah.

Sebagai contoh akan dibahas persamaan dasar angkutan limbah dengan koefisien dispersi diabaikan ($D \approx 0$), sehingga persamaan dasar angkutan limbah, Pers.(1.6) berubah menjadi:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

dengan substitusi $U = \frac{dx}{dt}$, maka diperoleh bentuk $\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial C}{\partial x} = 0$ atau $\frac{DC}{Dt} = 0$.

Jadi dari satu persamaan diferensial parsial, Pers.(2.5), diubah menjadi, dua persamaan diferensial biasa yaitu

$$U = \frac{dx}{dt} \text{ dan } \frac{DC}{Dt} = 0 \quad (2.6)$$

Pers.(2.6) jika diintegrasikan dengan andaian U bernilai konstan akan diperoleh

$$x = \int_{t(n)}^{t(n+1)} U dt = U[t(n+1) - t(n)] = U\Delta t \quad (2.7)$$

Dari Pers.(2.7) dapat dikatakan bahwa konsentrasi limbah pada suatu titik pada sebuah sungai pada suatu waktu adalah sama dengan konsentrasi limbah pada waktu sebelumnya di suatu titik yang berjarak $U\Delta t$ disebelah hulu dengan Δt adalah selisih waktu.

Perlu diperhatikan disini bahwa penyelesaian dengan metode karakteristik yang menghasilkan Pers.(2.7) di atas merupakan **penyelesaian analitis**, karena secara menerus Pers.(2.7) berlaku untuk seluruh domain. Ada beberapa penyelesaian dengan metode karakteristik yang integrasinya tidak dapat dihitung langsung seperti dalam kasus di atas tetapi harus dilakukan secara numeris, namun demikian metode karakteristik tetap merupakan suatu **penyelesaian analitis**.

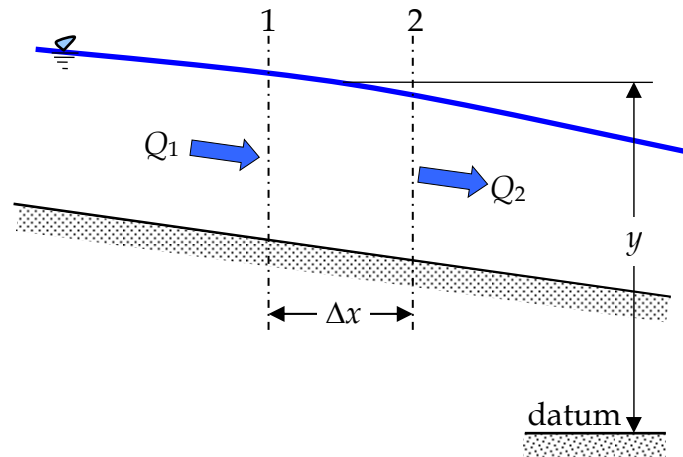
Konservasi massa aliran saluran terbuka

Persamaan konservasi massa atau kontinuitas untuk aliran tak permanen satu dimensi dapat dijabarkan dengan pertolongan sebuah volume kontrol seperti yang tertera pada Gambar 2. Volume kontrol adalah pias air yang di-isolasi dari sekelilingnya sehingga dapat diamati secara rinci semua debit yang masuk dan keluar.

Ditinjau pias air sepanjang Δx seperti tampak dalam Gambar 2. Pada pengaliran muka air bebas Q_2 tidaklah perlu sama dengan Q_1 , sehingga perbedaan tersebut dapat dinyatakan dalam persamaan sbb:

$$Q_2 - Q_1 = \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x \quad (2.8)$$

dengan Q_1 adalah debit masuk volume kontrol dan Q_2 adalah debit keluar volume kontrol, Δx adalah panjang pias volume kontrol, dan $\frac{\partial Q}{\partial x}$ adalah kecepatan perubahan nilai Q sepanjang Δx .



Gambar 2. Volume kontrol untuk penjabaran persamaan kontinuitas

Dalam Pers.(2.8), jika debit lebih banyak yang masuk volume kontrol ($Q_1 > Q_2$), maka nilai $\frac{\partial Q}{\partial x}$ adalah negatif, sedangkan jika debit lebih banyak yang keluar volume kontrol ($Q_2 > Q_1$), maka nilai $\frac{\partial Q}{\partial x}$ adalah positif.

Karena sepanjang Δx mungkin terjadi penambahan atau pengurangan debit, jadi luas tampang basah (A) pada pias tersebut dapat berubah pula untuk mengimbangi perubahan debit tersebut. Besarnya perubahan tersebut sepanjang Δx dapat dinyatakan dalam persamaan sbb:

$$\frac{\partial A}{\partial t} \Delta x \quad (2.9)$$

Dalam Pers.(2.9), jika debit lebih banyak yang masuk volume kontrol ($Q_1 > Q_2$), maka nilai $\frac{\partial A}{\partial t}$ adalah positif, sedangkan jika debit lebih banyak yang keluar volume kontrol ($Q_2 > Q_1$), maka nilai $\frac{\partial A}{\partial t}$ adalah negatif. Jadi kedua persamaan di atas, Pers.(2.8) dan (2.9), harus mempunyai nilai yang sama tetapi berlawanan tandanya, sehingga didapat persamaan kontinuitas untuk aliran tidak permanen sebagai berikut:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (2.10)$$

Jika terdapat aliran dari samping sepanjang pias Δx , maka Pers.(2.10) menjadi:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q_\ell \quad (1.4)$$

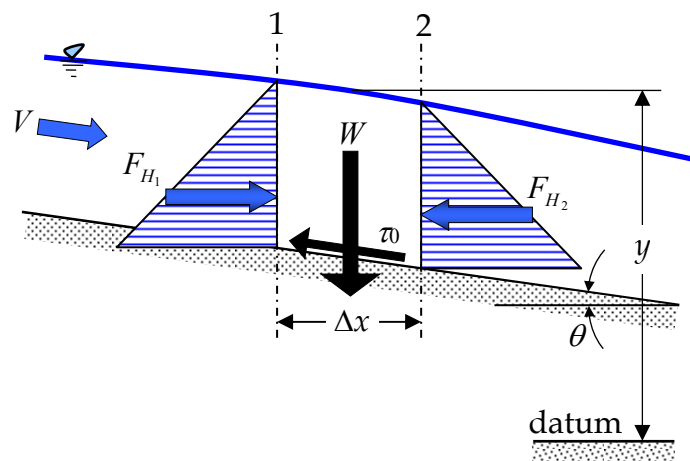
dengan Q adalah debit aliran (m^3/detik), x adalah jarak memanjang sungai, A adalah luas tampang basah (m^2), t menunjukkan waktu dalam detik, dan q_ℓ adalah debit lateral dari samping kiri dan kanan sungai ($\text{m}^3/\text{detik}/\text{m}$).

Konservasi momentum aliran saluran terbuka

Selain hukum kekekalan massa, suatu aliran air harus memenuhi hukum kekekalan momentum. Hukum kekekalan momentum yang dinyatakan dalam persamaan momentum sebenarnya adalah penjabaran dari gaya-gaya dan momentum yang bekerja pada air dalam volume kontrol, sehingga menyebabkan air tersebut mengalir. Hukum kekekalan momentum mengatakan bahwa

“jumlah fluks momentum yang masuk dan keluar volume kontrol + jumlah gaya-gaya yang bekerja pada volume kontrol = perubahan momentum didalam volume kontrol.”

Untuk menerangkan dan menerapkan hukum kekekalan momentum di atas, maka digunakan lagi konsep volume kontrol seperti terlihat dalam Gambar 3.



Gambar 3. Gaya-gaya yang bekerja pada sebuah volume kontrol.

Momentum (M) dalam suatu volume kontrol adalah perkalian antara massa (m) dan kecepatan (V), kalau dinyatakan dalam persamaan:

$$M = m \times V$$

sedangkan fluks momentum adalah perkalian antara fluks massa (ρVA) kali kecepatan, kalau dinyatakan dalam persamaan:

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \rho V A V = \rho V^2 A$$

Jika digunakan anggapan: (1) aliran satu dimensi sehingga kecepatan aliran untuk setiap titik pada luas tampang basah sama nilainya dan (2) rapat massa ρ adalah konstan, maka perubahan momentum didalam volume kontrol:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A \Delta x V) = \rho \frac{\partial(AV)}{\partial t} \Delta x \quad (2.11)$$

sedangkan fluks momentum yang masuk dan keluar volume kontrol

$$\rho V^2 A - \left[\rho V^2 A + \frac{\partial(\rho V^2 A)}{\partial x} \Delta x \right] = -\rho \frac{\partial(AV^2)}{\partial x} \Delta x \quad (2.12)$$

Gaya-gaya yang bekerja pada volume kontrol adalah gaya berat, gaya gesekan dan gaya hidrostatika. Masing-masing gaya ini akan dibahas pada bab berikut.

Jika dipakai anggapan bahwa kemiringan dasar saluran adalah kecil atau dengan perkataan lain sudut θ (lihat Gambar 3) adalah kecil, sehingga

$$\theta \approx 0 \rightarrow \cos \theta \approx 1, \text{ maka } \sin \theta = \cos \theta \tan \theta \approx \tan \theta$$

Komponen gaya berat air yang mendorong air dapat dinyatakan sebagai:

$$W \sin \theta = \rho g A \Delta x \sin \theta = \rho g A \Delta x \tan \theta = \rho g A S_0 \Delta x \quad (2.13)$$

dengan S_0 adalah sudut kemiringan dasar saluran.

Jika dipakai anggapan bahwa gaya gesekan pada aliran tak permanen masih mengikuti hukum-hukum untuk aliran permanen, maka gaya gesekan dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}
 P\Delta x\tau_0 &= P\Delta x\rho gRS_f \\
 &= \rho gAS_f\Delta x
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

dengan P adalah keliling basah, τ_0 adalah tegangan gesek pada keliling basah, R adalah radius hidraulik tampang basah ($= A/P$), dan S_f adalah garis kemiringan energi.

Jika dipakai anggapan bahwa percepatan vertikal aliran dapat diabaikan, maka tekanan dalam aliran adalah tekanan hidostatika. Penjabaran gaya hidrostatika yang bekerja pada volume kontrol diperlihatkan pada Gambar 4. Gaya hidrostatika yang bekerja pada tampang lintang saluran dapat dinyatakan sebagai

$$F_H = \int_{z=0}^{z=h} \rho g(h-z)B(z)dz
 \tag{2.15}$$

sehingga gaya hidrostatika total adalah

$$\begin{aligned}
 \Delta F_H &= F_{H_1} - F_{H_2} \\
 &= F_H - \left(F_H + \frac{\partial F_H}{\partial x} \Delta x \right) \\
 &= -\rho g \frac{\partial}{\partial x} \int_{z=0}^{z=h} (h-z)B(z)dz \Delta x \\
 &= -\rho g \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial h}{\partial x} \underbrace{\int_{z=0}^{z=h} B(z)dz}_{\text{luas tampang basah}} \Delta x + \int_{z=0}^{z=h} (h-z) \frac{\partial B(z)}{\partial x} \Big|_{h=\text{konst}} dz \Delta x \end{array} \right\} \\
 \Delta F_H &= -\rho g \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x} A \Delta x - \rho g \int_{z=0}^{z=h} (h-z) \frac{\partial B(z)}{\partial x} \Big|_{h=\text{konst}} dz \Delta x}_{\text{suku terakhir}}
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Untuk saluran prismatic suku terakhir dari Pers.(2.16) nilainya mendekati nol sehingga diabaikan. Untuk saluran tak prismatic yang perubahannya $B(z)$ tidak mendadak, maka suku terakhir ini merupakan gaya yang menekan pada dinding saluran, sehingga dinding saluran memberi reaksi yang besarnya sama dengan arah yang berlawanan (lihat Gambar 4). Jadi baik untuk saluran prismatic

$$\begin{aligned} \frac{\partial(AV)}{\partial t} &= -\frac{\partial(AV^2)}{\partial x} + gAS_0 - gAS_f - gA\frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(AV^2)}{\partial x} + gA\left(\frac{\partial h}{\partial x} - S_0 + S_f\right) &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{A}\right) + gA\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{-\partial y_b}{\partial x} - S_0 + S_f\right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Jika digunakan koefisien Coriolis, α , untuk mengoreksi pemakaian rumus kecepatan aliran rerata (V) sehingga mewakili distribusi kecepatan disetiap titik didalam tampang basah aliran, maka Pers. (2.18) dapat ditulis sebagai

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha \frac{Q^2}{A}\right) + gA\left(\frac{\partial y}{\partial x} + S_f\right) = 0$$

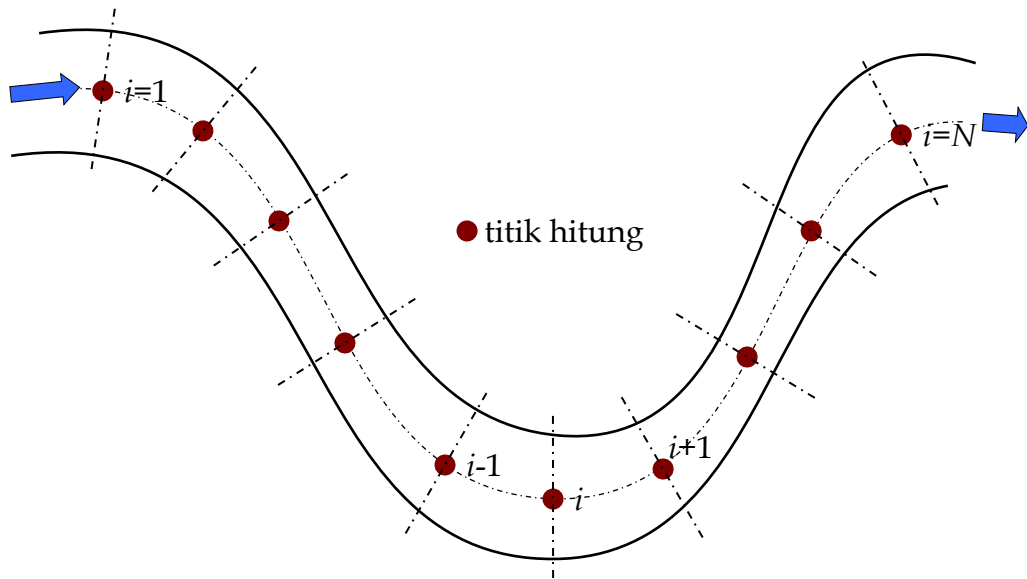
Sehingga persamaan momentum dalam bentuknya yang terakhir, yang akan dipakai pada perhitungan selanjutnya, dapat ditulis sebagai

$$\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{\text{suku 1}} + \underbrace{2\alpha \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x}}_{\text{suku 2}} - \underbrace{\alpha \left(\frac{Q}{A}\right)^2 \frac{\partial A}{\partial x}}_{\text{suku 3}} + \underbrace{gA \frac{\partial y}{\partial x}}_{\text{suku 4}} + \underbrace{gAS_f}_{\text{suku 5}} = 0 \quad (1.5)$$

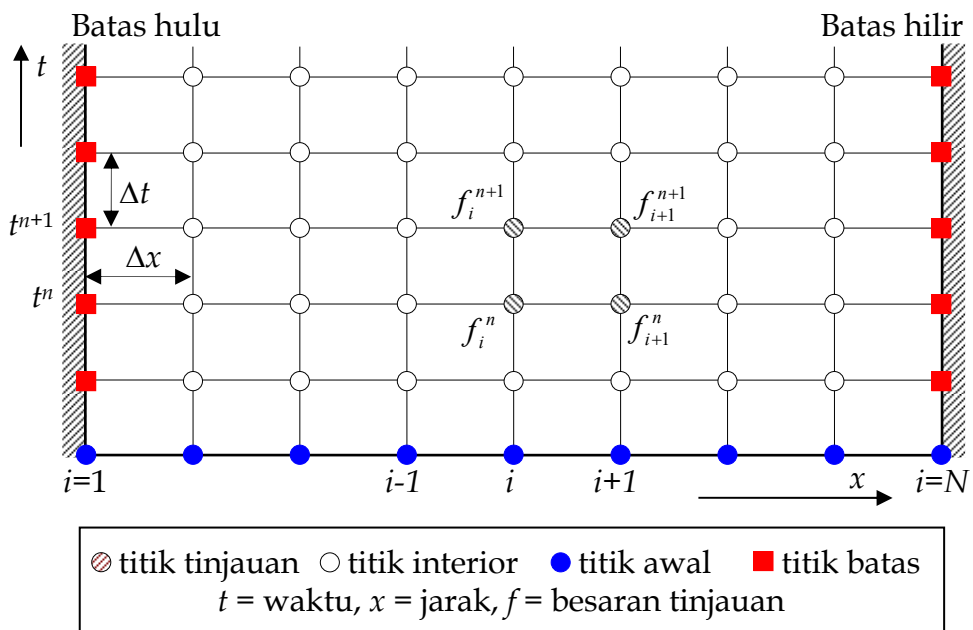
dengan α adalah koefisien koreksi kecepatan rerata tampang basah (= koefisien Coriolis), g adalah percepatan gravitasi (m/detik²), S_f adalah kemiringan garis energi, y adalah elevasi muka air (m).

Diskritisasi Keadaan Alam

Dalam bab ini akan dibahas secara umum bagaimana suatu kondisi sungai di lapangan didiskritkan untuk keperluan model matematik numeris. Pada Gambar 5 disajikan situasi sungai dimana pada titik-titik tertentu diadakan pengukuran tampang dan jaraknya. Titik-titik ini disebut titik-titik hitungan yang penentuannya harus dibuat sedemikian rupa sehingga pada saat kalibrasi model hasilnya sesuai dengan data lapangan. Segala parameter fisik dari sungai yang bersangkutan diwakili oleh parameter fisik di titik-titik hitungan.



Gambar 5. Situasi sebuah sungai dengan titik-titik hitungan



Gambar 6. Kisi beda hingga ruang (x) dan waktu (t)

Biasanya untuk metode beda hingga dimana persamaannya mengandung diskritisasi terhadap ruang dan waktu, maka skema-skema beda hingga lebih jelas jika dijelaskan dengan kisi beda hingga seperti disajikan dalam Gambar 6. Pada kisi beda hingga, besaran tinjauan misalkan debit, Q , elevasi muka air, y , atau kecepatan air, V , digambarkan pada kisi tersebut, sehingga masing-masing skema

D:\My Stuffs\Publikasi\ Model Matematika\ Model Matematika.docx (886Kb)

dapat dijelaskan sebagai fungsi dari besaran tinjauan untuk ruang, x , dan waktu, t , yang berbeda,

Skema-skema Diferensi Hingga

Bab ini akan menjelaskan beberapa skema yang sering dijumpai dalam model numeris beda hingga. Penjelasan dari setiap skema selalu menggunakan skema beda hingga (Gambar 2.5). Dasar dari setiap skema dari metode beda hingga dapat dirunut dari deret Taylor.

Deret Taylor

Deret Taylor dalam artian fisik dapat diartikan sebagai berikut “suatu besaran tinjauan pada suatu ruang dan waktu tertentu (ruang dan waktu tinjauan) dapat dihitung dari besaran itu sendiri pada ruang dan waktu tertentu yang mempunyai perbedaan kecil dengan ruang dan waktu tinjauan” atau secara matematis dapat dinyatakan sebagai:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \frac{(\Delta x)^1}{1!} f^{(1)}(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f^{(2)}(x_i) + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_i) + \dots \quad (2.19)$$

Skema Maju

Dengan menggunakan tiga suku pertama dari ruas kanan deret Taylor, Pers.(2.19) diperoleh

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x_i) &= \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i) \\ \left. \frac{df}{dx} \right]_{x=x_i} &= \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} - \underbrace{\frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i)}_{\text{derajat satu}} \\ \left. \frac{df}{dx} \right]_{x=x_i} &= \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dari Pers.(2.20), maka skema maju disebut mempunyai kesalahan derajat satu atau $O(\Delta x)$.

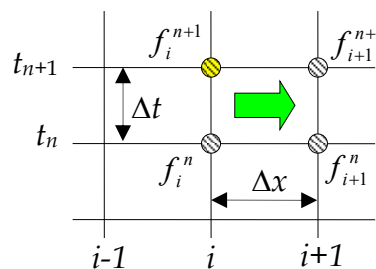
Dengan menggunakan kisi beda hingga maka skema maju biasa ditulis sebagai dibawah ini.

Beda hingga terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} \text{ atau } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x} \tag{2.21}$$

dengan $\Delta x = x_{i+1} - x_i$.

Pada skema maju informasi pada titik hitung i dihubungkan dengan informasi pada titik hitung $i+1$ yang berada didepannya.



Gambar 7. Kisi skema maju

Beda hingga terhadap waktu dapat digunakan salah satu dari diskritisasi di bawah ini:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \text{ atau } \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t} \tag{2.22}$$

dengan $\Delta x = t^{n+1} - t^n$

Skema Mundur

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \frac{(\Delta x)^1}{1!} f^{(1)}(x_i) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f^{(2)}(x_i)$$

$$f^{(1)}(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i)$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right]_{x=x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_i - \Delta x)}{\Delta x} + \underbrace{\frac{\Delta x}{2!} f^{(2)}(x_i)}_{\text{derajat satu}} \tag{2.23}$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right]_{x=x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x}$$

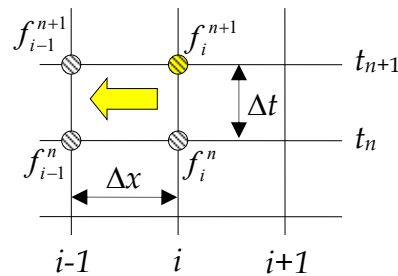
Dengan menggunakan kisi beda hingga maka skema mundur biasa ditulis sebagai dibawah ini.

Beda hingga terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} \text{ atau } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \quad (2.24)$$

dengan $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

Pada skema mundur informasi pada titik hitung i dihubungkan dengan informasi pada titik hitung $i-1$ yang berada dibelakangnya.



Gambar 8. Kisi skema mundur

Sedangkan beda hingga terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i-1} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^n}{\Delta t} \text{ atau } \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \quad (2.24a)$$

dengan $\Delta t = t^{n+1} - t^n$

Skema Tengah

Jika deret Taylor dari Pers.(2.20) dikurangi dengan deret Taylor dari Pers.(2.23) akan didapat skema tengah sebagai berikut:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} \text{ atau } \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (2.25a)$$

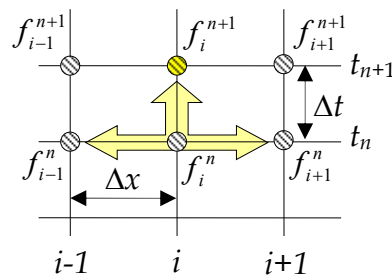
$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i &= \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\text{maju}} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\text{mundur}}}{\Delta x} = \frac{\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} - \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

untuk t^n menjadi

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

atau untuk t^{n+1} menjadi

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (2.25b)$$



Gambar 9. Kisi skema tengah

Sedangkan beda hinga terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i-1} = \frac{f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^n}{\Delta t}, \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \quad \text{atau} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n}{\Delta t} \quad (2.25c)$$

dengan $\Delta t = t^{n+1} - t^n$

Untuk skema beda hinga tengah ini selanjutnya penjabarannya tidak akan dijelaskan secara rinci, tetapi hanya garis besarnya saja, kecuali dipandang perlu.

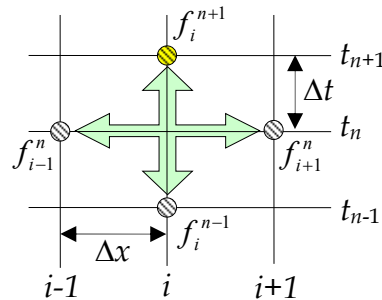
Skema Loncat-Katak (Leap-frog)

Beda hinga terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.26)$$

Beda hingga terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} \tag{2.27}$$



Gambar 10. Kisi skema loncat katak

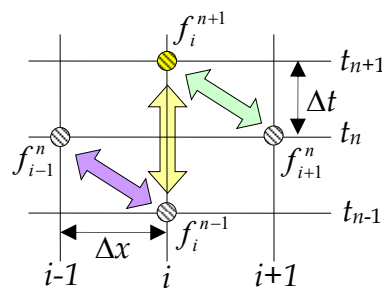
Skema DuFort-Frankel

Beda hingga terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1}^n - f_i^{n+1} - f_i^{n-1} + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \tag{2.28}$$

Beda hingga terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^{n-1}}{2\Delta t} \tag{2.29}$$



Gambar 11. Kisi skema DuFort-Frankel

Skema Crank-Nicolson

Skema ini menggunakan teknik pembobotan untuk diskritisasi waktu sekarang (t^n) dan diskritisasi waktu yang akan datang (t^{n+1}) dengan cara yang lebih fleksibel yaitu dengan menggunakan *faktor pemberat waktu*.

Beda hingga terhadap ruang:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \theta \left(\frac{f_{i+1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) + (1 - \theta) \left(\frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \quad (2.30)$$

dengan $0 \leq \theta \leq 1$ adalah 'faktor pemberat waktu.'

Beda hingga terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \quad (2.31)$$

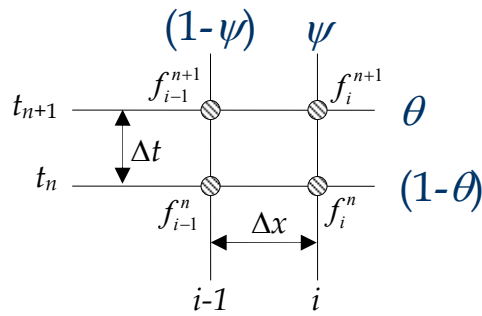
Skema Empat Titik Preissmann

Skema empat titik Preissmann akan dijelaskan pada bab terakhir secara rinci, karena akan digunakan untuk membangun model matematik numeris aliran tak tunak di sungai.

Masing-masing skema beda hingga di atas dapat dikelompokkan menjadi tiga keluarga besar yaitu keluarga skema eksplisit, implisit dan eksplisit-implisit. Untuk penjelasan keluarga skema eksplisit dan implisit, maka di bawah ini disajikan contoh dari kedua keluarga tersebut. Sedangkan untuk keluarga skema eksplisit-implisit contohnya tidak diberikan, karena hanya merupakan gabungan dari kedua keluarga eksplisit dan implisit. Contoh yang terkenal dari skema eksplisit-implisit adalah skema empat titik Preissmann.

Faktor Bobot Waktu dan Ruang

Ide dari skema Crank-Nicolson dengan $0 \leq \theta \leq 1$ sebagai 'faktor pemberat waktu,' dapat dikembangkan secara umum untuk 'faktor pemberat ruang' dengan simbol $0 \leq \psi \leq 1$. Secara visual faktor pemberat tersebut disajikan dalam Gambar 12.



Gambar 12. Pembobotan untuk waktu θ dan ruang ψ

Aplikasi pembobotan terhadap ruang diatas jika diaplikasikan pada Skema Mundur Pers. (2.24) diperoleh:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = (1-\theta) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i^n + \theta \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i^{n+1} = (1-\theta) \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} + \theta \frac{f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}$$

dengan $\Delta x = x_i - x_{i-1}$.

Sedangkan aplikasi pembobotan terhadap waktu diatas jika diaplikasikan pada Skema Mundur Pers. (2.25) diperoleh:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (1-\psi) \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{i-1} + \psi \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i = (1-\psi) \frac{f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^n}{\Delta t} + \psi \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t}$$

dengan $\Delta t = t^{n+1} - t^n$

Untuk skema-skema yang lain cara yang serupa dapat dilakukan. Pembobotan ini secara umum dapat diaplikasikan setiap skema. Untuk aplikasi pembobotan terhadap waktu dikenal tiga jenis skema yaitu

1. Skema Eksplisit yaitu skema pembobotan ruang dengan nilai $\theta = 0$,
2. Skema Implisit yaitu skema pembobotan ruang dengan nilai $\theta = 1$,
3. Skema Eksplisit-Implisit yaitu skema pembobotan ruang dengan nilai $0 < \theta < 1$.

Skema Eksplisit

Persamaan kontinuitas $\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$ akan didiskritkan sebagai berikut:

$$\frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} + \frac{A_i^{n+1} - A_i^n}{\Delta t} = 0 \tag{2.32}$$

D:\My Stuffs\Publikasi\ Model Matematika \ Model Matematika.docx (886Kb)

Nilai setiap besaran untuk waktu yang lalu selalu sudah diketahui, sehingga dalam Pers.(2.32) nilai A_i^{n+1} akan dihitung. Nilai tersebut langsung dapat dihitung secara eksplisit sebagai berikut:

$$A_i^{n+1} = A_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{i+1}^n - Q_i^n) \quad (2.33)$$

Skema Implisit

Persamaan kontinuitas $\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$ akan didiskritkan sebagai berikut:

$$\frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}}{\Delta x} + \frac{A_i^{n+1} - A_i^n}{\Delta t} = 0 \quad (2.34)$$

Dalam Pers.(2.34) hanya A_i^n sudah diketahui, sehingga nilai besaran pada waktu sekarang ($n+1$) belum dapat dihitung tanpa menyelesaikan persamaan yang serupa untuk titik-titik hitungan yang lainnya.

ALIRAN 1-D TAK TUNAK PADA SUNGAI

Pada bab ini akan dibahas model matematik numeris aliran tak tunak pada saluran/sungai terbuka. Skema yang akan dipakai disini adalah skema yang banyak dipakai di dunia yaitu skema empat titi Preissmann. Bagian pertama adalah diskritisasi persamaan kontinuitas dan momentum, Pers.(1.4) & (1.5) dengan skema Preissmann sehingga didapatkan persamaan kerja. Selanjutnya persamaan kerja ini diaplikasikan untuk membangun model sungai tunggal dan jaringan sungai.

Cara non-iterasi Preissmann

Preissmann memakai metode diferensi hingga untuk menyelesaikan persamaan dasar aliran tak tunak di sungai. Cara non-iterasi Preissmann dimulai dengan mendefinisikan korelasi sbb:

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \Delta f \Rightarrow \Delta f_i = f_i^{n+1} - f_i^n \quad A1$$

dengan f mewakili sembarang variabel misalkan Q , y , A di titik-titik hitungan sepanjang sungai. Subskrip i menunjukkan lokasi titik-titik hitungan dan superskrip menunjukkan waktu dengan n untuk waktu yang telah lalu dan $n+1$ untuk waktu sekarang.

Dengan cara ini, maka variabel yang akan dihitung yaitu f_i^{n+1} ditransformasikan menjadi Δf , sedangkan f_i^n merupakan variabel yang telah diketahui dari hitungan sebelumnya.

Skema Empat Titik Preissmann

Untuk menghitung nilai suatu variabel di titik-titik hitungan sepanjang sungai Preissmann menggunakan empat buah titik untuk menghitung setiap suku pembentuk persamaan dasar aliran tak tunak di sungai.

$$\begin{aligned}
f(x,t) &= \frac{\theta}{2}(f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}) + \frac{1-\theta}{2}(f_i^n + f_{i+1}^n) \\
&= \frac{\theta}{2}(f_i^n + \Delta f_i + f_{i+1}^n + \Delta f_{i+1}) + \frac{1-\theta}{2}(f_i^n + f_{i+1}^n) \\
&= \frac{\theta}{2}(\Delta f_i + \Delta f_{i+1}) + \frac{1}{2}(f_i^n + f_{i+1}^n) \\
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{1}{2\Delta t}(f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n) + \frac{1}{2\Delta t}(f_i^{n+1} - f_i^n) \\
&= \frac{1}{2\Delta t}\Delta f_{i+1} + \frac{1}{2\Delta t}\Delta f_i \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\theta}{\Delta x}(f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x}(f_{i+1}^n - f_i^n) \\
&= \frac{\theta}{\Delta x}(f_{i+1}^n + \Delta f_{i+1} - f_i^n - \Delta f_i) + \frac{1-\theta}{\Delta x}(f_{i+1}^n - f_i^n) \\
&= \frac{\theta}{\Delta x}(\Delta f_{i+1} - \Delta f_i) + \frac{1}{\Delta x}(f_{i+1}^n - f_i^n)
\end{aligned}$$

A2

dengan $0 \leq \theta \leq 1$ disebut dengan faktor pemberat waktu ($\theta = 1$ untuk skema implisit, sedangkan $\theta = 0$ untuk skema eksplisit).

Pers.(A2) akan selalu dibutuhkan untuk penjabaran selanjutnya.

Persamaan kerja beda hingga

Persamaan kontinuitas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{1}{2\Delta t}(A_{i+1}^{n+1} - A_{i+1}^n + A_i^{n+1} - A_i^n) \\
&= \frac{1}{2\Delta t}(\Delta A_{i+1} + \Delta A_i) \\
&= \frac{1}{2\Delta t}(b_{i+1}\Delta y_{i+1} + b_i\Delta y_i)
\end{aligned}$$

A5

Catatan: $\Delta A = b\Delta y$ dengan b adalah lebar muka air dalam meter.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_i^{n+1}) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (Q_{i+1}^n - Q_i^n) \\
&= \frac{\theta}{\Delta x} (Q_{i+1}^n + \Delta Q_{i+1} - Q_i^n - \Delta Q_i) + \frac{1-\theta}{\Delta x} (Q_{i+1}^n - Q_i^n) \\
&= \frac{1}{\Delta x} (Q_{i+1}^n + \theta \Delta Q_{i+1} - Q_i^n - \theta \Delta Q_i)
\end{aligned}
\tag{A6}$$

Substitusi Pers.(A5) dan (A6) kedalam Pers.(A3) menghasilkan

$$\frac{1}{\Delta x} (Q_{i+1}^n + \theta \Delta Q_{i+1} - Q_i^n - \theta \Delta Q_i) + \frac{1}{2\Delta t} (b_{i+1} \Delta y_{i+1} + b_i \Delta y_i) = q_t$$

yang dapat ditulis sebagai

$$A \Delta y_{i+1} + B \Delta Q_{i+1} = C \Delta y_i + D \Delta Q_i + G
\tag{A7}$$

$$\text{dengan } A = \frac{b_{i+1}}{2\Delta t}, B = \frac{\theta}{\Delta x}, C = \frac{-b_i}{2\Delta t}, D = B = \frac{\theta}{\Delta x}, G = \frac{Q_i^n - Q_{i-1}^n}{\Delta x} + q_t
\tag{A8}$$

Pers.(A7) dinamai Persamaan Pias Pertama dan untuk lebih singkatnya selanjutnya disebut PPP. Demikian pula halnya dengan persamaan momentum di bawah ini akan diubah kedalam bentuk serupa PPP.

Persamaan momentum

$$\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial t}}_{\text{suku 1}} + 2\alpha \underbrace{\frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x}}_{\text{suku 2}} - \alpha \underbrace{\left(\frac{Q}{A}\right)^2 \frac{\partial A}{\partial x}}_{\text{suku 3}} + \underbrace{gA \frac{\partial y}{\partial x}}_{\text{suku 4}} + \underbrace{gAS_f}_{\text{suku 5}} = 0
\tag{A9}$$

Pers.(A9) akan diubah menjadi persamaan kerja yang mempunyai bentuk:

$$AA \Delta y_{i+1} + BB \Delta Q_{i+1} = CC \Delta y_i + DD \Delta Q_i + GG
\tag{A10}$$

Persamaan (A10) disebut dengan Persamaan Pias Kedua atau selanjutnya disebut PPD untuk lebih singkatnya. Karena panjangnya penjabaran yang akan terjadi, maka Pers.(A9) akan dijabarkan untuk masing-masing suku secara terpisah. Hasil akhir dari penjabaran koefisien pengaruh AA, BB, CC, DD, dan GG adalah sebagai berikut:

Koefisien AA adalah jumlah dari:

$$\text{Suku 1: } AA = 0
\tag{A95}$$

$$\text{Suku 2: } AA = \frac{\alpha \theta b_1}{\Delta x} \left(\frac{Q_1}{A_1} \right) \left(\frac{Q}{A_1} - \frac{Q_1}{A_1} \right) \quad (\text{A96})$$

$$\text{Suku 3: } AA = \frac{\alpha \theta b_1}{4 \Delta x} \left(\frac{Q_1}{A_1} + \frac{Q}{A} \right) \left\{ \left(1 - \frac{2A}{A_1} \right) \frac{Q_1}{A_1} - \frac{Q}{A} \right\} \quad (\text{A97})$$

$$\text{Suku 4: } AA = \frac{g \theta}{2 \Delta x} (b_1 y_1 - b_1 y + A + A_1) \quad (\text{A98})$$

$$\text{Suku 5: } AA = \frac{g \theta b_1}{2} \left\{ \beta \left(\frac{Q|Q|}{K^2} \right) + (1 - \beta) \left(\frac{Q_1|Q_1|}{K_1^2} \right) \right\} - g \theta (1 - \beta) (A + A_1) \frac{dK_1}{dy} \left(\frac{Q_1|Q_1|}{K_1^3} \right) \quad (\text{A99})$$

Koefisien BB adalah jumlah dari:

$$\text{Suku 1: } BB = \frac{1}{2 \Delta t} \quad (\text{A100})$$

$$\text{Suku 2: } BB = \frac{\alpha \theta}{\Delta x} \left(\frac{2Q_1}{A_1} + \frac{Q}{A} - \frac{Q}{A_1} \right) \quad (\text{A101})$$

$$\text{Suku 3: } BB = \frac{\alpha \theta}{2 \Delta x} \left(\frac{A}{A_1} - 1 \right) \left(\frac{Q_1}{A_1} + \frac{Q}{A} \right) \quad (\text{A102})$$

$$\text{Suku 4: } BB = 0 \quad (\text{A103})$$

$$\text{Suku 5: } BB = g \theta (1 - \beta) (A + A_1) \frac{|Q_1|}{K_1^2} \quad (\text{A104})$$

Koefisien CC adalah jumlah dari:

$$\text{Suku 1: } CC = 0 \quad (\text{A105})$$

$$\text{Suku 2: } CC = \frac{\alpha \theta b}{\Delta x} \left(\frac{Q}{A} \right) \left(\frac{Q_1}{A} - \frac{Q}{A} \right) \quad (\text{A106})$$

$$\text{Suku 3: } CC = \frac{\alpha \theta b}{4 \Delta x} \left(\frac{Q_1}{A_1} + \frac{Q}{A} \right) \left\{ \left(1 - \frac{2A_1}{A} \right) \frac{Q}{A} - \frac{Q_1}{A_1} \right\} \quad (\text{A107})$$

$$\text{Suku 4: } CC = \frac{g\theta}{2\Delta x}(by - by_1 + A + A_1) \quad (\text{A108})$$

$$\text{Suku 5: } CC = -\frac{g\theta b}{2} \left\{ \beta \left(\frac{Q|Q|}{K^2} \right) + (1-\beta) \left(\frac{Q_1|Q_1|}{K_1^2} \right) \right\} - g\theta\beta(A + A_1) \frac{dK}{dy} \left(\frac{Q|Q|}{K^3} \right) \quad (\text{A109})$$

Koefisien DD adalah jumlah dari:

$$\text{Suku 1: } DD = -\frac{1}{2\Delta t} \quad (\text{A110})$$

$$\text{Suku 2: } DD = \frac{\alpha\theta}{\Delta x} \left(\frac{2Q}{A} + \frac{Q_1}{A_1} - \frac{Q_1}{A} \right) \quad (\text{A111})$$

$$\text{Suku 3: } DD = \frac{\alpha\theta}{2\Delta x} \left(\frac{A_1}{A} - 1 \right) \left(\frac{Q_1}{A_1} + \frac{Q}{A} \right) \quad (\text{A112})$$

$$\text{Suku 4: } DD = 0 \quad (\text{A113})$$

$$\text{Suku 5: } DD = -g\theta\beta(A + A_1) \frac{|Q|}{K_1^2} \quad (\text{A114})$$

Koefisien GG adalah jumlah dari:

$$\text{Suku 1: } GG = 0 \quad (\text{A115})$$

$$\text{Suku 2: } GG = \frac{\alpha}{\Delta x} \left(\frac{Q}{A} + \frac{Q_1}{A_1} \right) (Q - Q_1) \quad (\text{A116})$$

$$\text{Suku 3: } GG = \frac{\alpha}{4\Delta x} \left(\frac{Q_1}{A_1} + \frac{Q}{A} \right)^2 (A_1 - A) \quad (\text{A117})$$

$$\text{Suku 4: } GG = -\frac{g\theta}{2\Delta x} (A + A_1)(y_1 - y) \quad (\text{A118})$$

$$\text{Suku 5: } GG = -\frac{g}{2} (A + A_1) \left\{ \beta \left(\frac{Q|Q|}{K^2} \right) + (1-\beta) \left(\frac{Q_1|Q_1|}{K_1^2} \right) \right\} \quad (\text{A119})$$

Catatan: dalam persamaan-persamaan diatas, f_{i+1} direpresentasikan dengan f_1 dan f_i direpresentasikan dengan f , dengan f adalah setiap variabel yang ada dalam persamaan-persamaan diatas.

SUNGAI TUNGGAL

Metode 'Sapuan-Ganda'

Persamaan kerja dari metoda 'sapuan-ganda' adalah Pers. (A7) dan (A10) untuk $i = 1, \dots, N-1$ dengan 'variabel tak diketahui' adalah Δy_i dan ΔQ_i untuk $i = 1, \dots, N$. Dengan demikian terdapat $2N$ variabel tak diketahui dengan $2(N-1) = 2N-2$ persamaan, sehingga untuk menyelesaikan sistem persamaan linier, Pers. (A7) dan (A10) masih dibutuhkan tambahan 2 persamaan. Dua persamaan tambahan tersebut didapat dari dua kondisi batas hulu dan hilir.

Untuk memulai hitungan dibutuhkan pula kondisi awal berupa y_i dan Q_i untuk $i = 1, \dots, N$.

Sistem persamaan linier di atas dapat diselesaikan dengan sembarang 'linear solver' karena bentuknya secara umum dapat ditulis sebagai $[A]\{\Delta\} = \{B\}$. Tetapi penyelesaian general dengan 'linear solver package' biasanya membutuhkan memori yang besar dan waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan persamaan di atas relatif lama. Oleh karena itu di sini akan dibahas salah satu cara penyelesaian tanpa menggunakan matrik yaitu metoda 'sapuan-ganda' yang akan dijelaskan di bawah ini.

1. Eliminasi ΔQ_i dari Pers. (A7) dan (A10) menghasilkan:

$$\Delta y_i = L_i \Delta y_{i+1} + M_i \Delta Q_{i+1} + N_i \quad (31)$$

2. Diajukan suatu korelasi sbb:

$$\Delta Q_i = E_i \Delta y_i + F_i \quad (32)$$

3. Substitusi Pers. (31) dan (32) kedalam Pers. (A7) akan menghasilkan persamaan berbentuk

$$\Delta Q_{i+1} = E_{i+1} \Delta y_{i+1} + F_{i+1}$$

dengan

$$E_{i+1} = \frac{L_i(C + DE_i) - A}{B - M_i(C + DE_i)} \quad (33.a)$$

$$F_{i+1} = \frac{N_i(C + DE_i) + DF_i + G}{B - M_i(C + DE_i)} \quad (33.b)$$

$$L_i = \frac{A(DD) - (AA)D}{C(DD) - (CC)D} \quad (33.c)$$

$$M_i = \frac{B(DD) - (BB)D}{C(DD) - (CC)D} \quad (33.d)$$

$$N_i = \frac{D(GG) - (DD)G}{C(DD) - (CC)D} \quad (33.e)$$

Tampak di atas bahwa Pers. (32) s/d (33) mempunyai hubungan 'recursive' dimana koefisien pengaruh, E_{i+1} dan F_{i+1} , nilainya tergantung dari nilai E_i dan F_i , sehingga koefisien pengaruh dapat dihitung untuk masing-masing titik-titik hitungan, i , asalkan koefisien pengaruh untuk $i = 1$ telah dihitung terlebih dahulu. Inilah yang disebut dengan 'sapuan ke hilir' dimana E_1 dan F_1 harganya dihitung dari kondisi batas hulu, kemudian semua koefisien pengaruh yang lainnya dapat dihitung dengan Pers. (33). Disamping itu koefisien pengaruh yang lain yaitu L_i , M_i , N_i dihitung untuk setiap titik-titik hitungan. Koefisien ini akan digunakan pada 'sapuan ke hulu' yang akan dijelaskan di bawah ini.

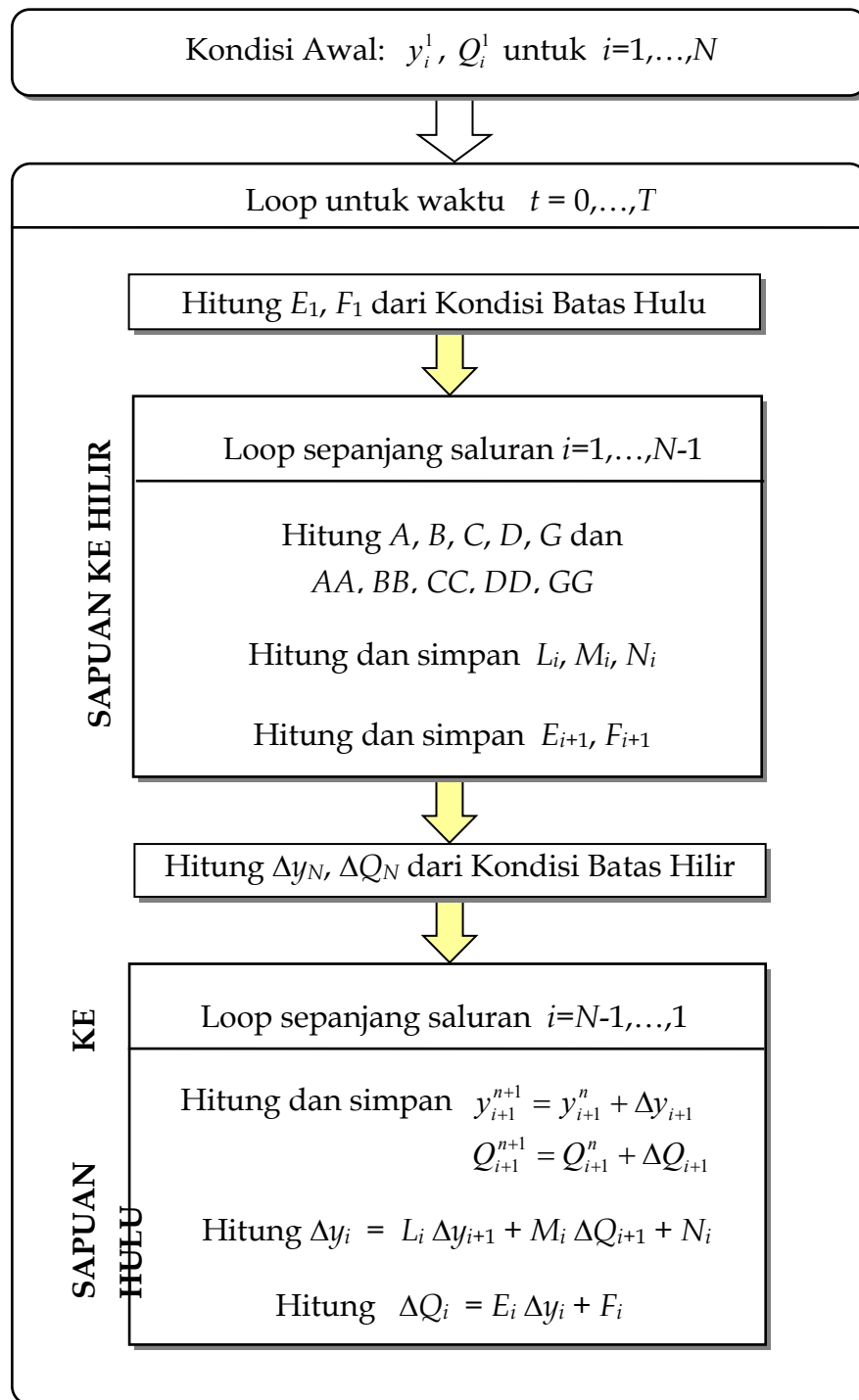
Setelah semua koefisien pengaruh terhitung, maka akan dilakukan 'sapuan ke hulu' dimana Δy_N dan ΔQ_N dihitung dari kondisi batas hilir. Setelah itu Δy_i dan ΔQ_i untuk setiap titik-titik hitungan dapat dihitung mundur ke arah hilir dengan Pers. (31) dan (32).

Untuk memperjelas konsep dari metoda 'sapuan-ganda,' maka bagan alirnya diperlihatkan pada Gambar 4.

Kondisi Awal

Seperti telah dijelaskan di atas, untuk memulai hitungan 'sapuan-ganda,' diperlukan kondisi awal yang berupa nilai y_i dan Q_i untuk seluruh panjang sungai atau untuk $i = 1$ s/d N .

**ALGORITMA 'SAPUAN-GANDA'
UNTUK SALURAN TUNGGAL**



Gambar 4. Bagan Alir Metoda 'Sapuan-ganda'

D:\My Stuffs\Publikasi\ Model Matematika \ Model Matematika.docx (886Kb)

Kondisi Batas

Dua kondisi batas masing-masing di hulu dan hilir saluran dibutuhkan untuk melengkapi persamaan dinamik dan kontinuitas, sehingga Q_i dan y_i untuk $i = 1, \dots, N$ dapat dihitung untuk setiap 'time step.' Kondisi batas ini harus disesuaikan bentuknya sehingga sesuai dengan Pers. (32). Bentuk umum persamaan kondisi batas adalah sebagai berikut:

$$\alpha \Delta y_i + \beta \Delta Q_i = \gamma_i \text{ untuk } i=1 \text{ dan } N \quad (34)$$

Untuk memulai 'sapan ke hilir' dibutuhkan nilai E_1 dan F_1 yang diperoleh dengan membandingkan Pers. (34) dengan Pers. (32) sehingga didapat hubungan

$$E_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} \text{ dan } F_1 = -\frac{\beta_1}{\gamma_1} \quad (35)$$

dengan α_1 , β_1 , dan γ_1 nilainya didapat dari kondisi batas hulu.

Untuk memulai 'sapan ke hulu,' dipakai Pers. (34) dan (32) untuk nilai $i = N$ yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$\alpha_N \Delta y_N + \beta_N \Delta Q_N = \gamma_N \quad (36)$$

$$\Delta Q_N = E_N \Delta y_N + F_N \quad (37)$$

dengan menggunakan Pers. (36) dan (37) dapat dihitung nilai Δy_N dan ΔQ_N sebagai berikut:

$$\Delta y_N = \frac{\gamma - \beta F_N}{\alpha + \beta E_N} \quad (38)$$

dan ΔQ_N dapat dihitung dari Pers. (37) setelah Δy_N terhitung dari Pers. (38). Nilai α_N , β_N , dan γ_N didapat dari kondisi batas hilir, sedangkan E_N dan F_N didapat dari 'sapan ke hilir.'

JARINGAN SUNGAI

Nodal Continuity

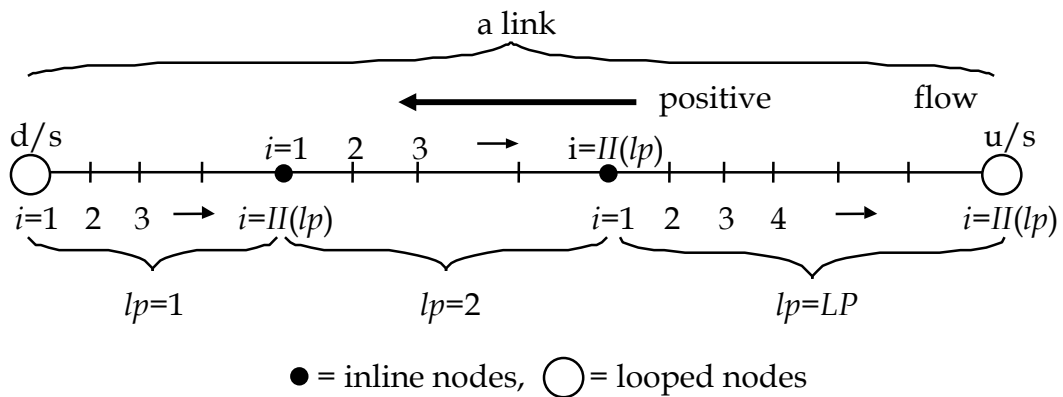


Figure 1. Definition sketch for link/pipe computation

Suppose there are relations as follows (u denotes u/s and d denotes d/s):

$$\Delta Q_u = E_u \Delta y_u + F_u + H_u \Delta y_d \tag{I-1}$$

$$\Delta Q_d = EE_u \Delta y_u + FF_u + HH_u \Delta y_d \tag{I-2}$$

Continuity at a looped-node is as follows :

$$\sum_{lp} Q_{lp}^{n+1} + Q_m^{n+1} = 0, m = 1,2,3,\dots, LNodes \tag{I-3}$$

$$\sum_{lp_{in}} Q_{lp}^{n+1} - \sum_{lp_{out}} Q_{lp}^{n+1} + Q_m^{n+1} = 0 \tag{I-4}$$

$$\sum_{in} Q_d^{n+1} - \sum_{out} Q_u^{n+1} + Q_m^{n+1} = 0 \tag{I-5}$$

or
$$\sum_{in} (Q_d^n + \Delta Q_d) - \sum_{out} (Q_u^n + \Delta Q_u) + Q_m^{n+1} = 0 \tag{I-6}$$

D:\My Stuffs\Publikasi\ Model Matematika \ Model Matematika.docx (886Kb)

Substitution Eqns. (I-1) and (I-2) into (I-6) yields :

$$\sum_{in} Q_d^n + \sum_{in} (EE_u \Delta y_u + FF_u + HH_u \Delta y_m) - \sum_{out} Q_u^n - \sum_{out} (E_u \Delta y_m + F_u + H_u \Delta y_d) + Q_m^{n+1} = 0 \tag{I-7}$$

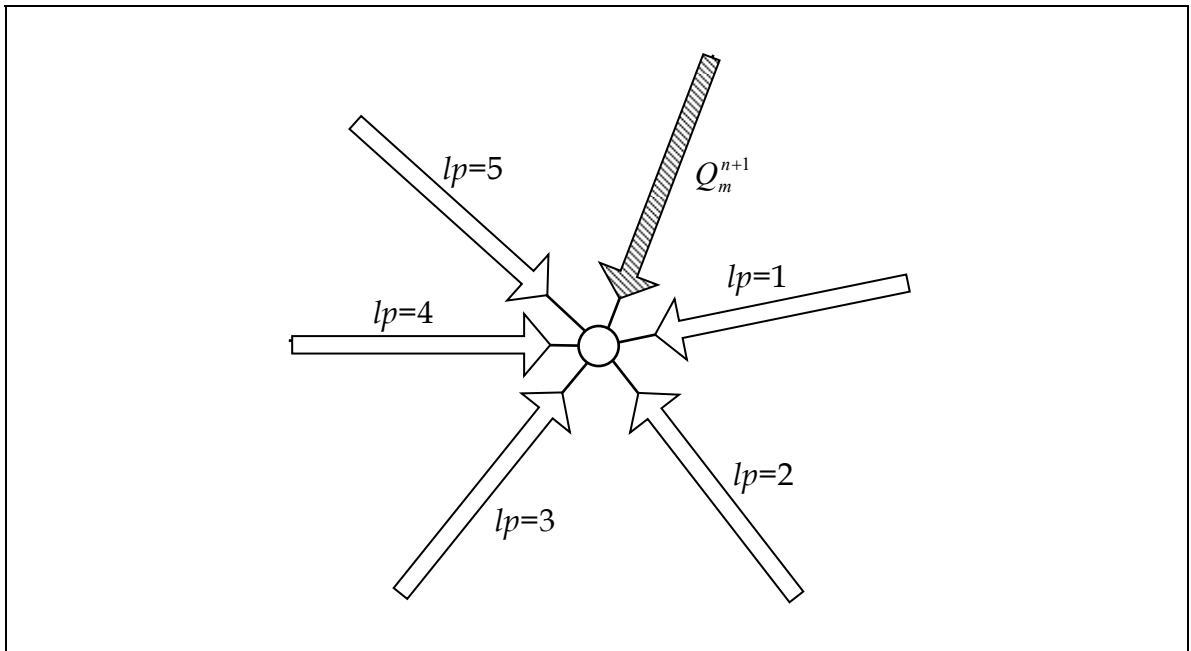


Figure 2. Continuity at a looped-node

Rewrite as :

$$\left(\sum_{in} HH_u - \sum_{out} E_u \right) \Delta y_m + \left(\sum_{in} EE_u \right) \Delta y_u - \left(\sum_{out} H_u \right) \Delta y_d = \sum_{out} (Q_u^n + F_u) - \sum_{in} (Q_d^n + FF_u) - Q_m^{n+1} \tag{I-8}$$

In matrix form, one may write Eqn.(I-8) as

$$[A]\{\Delta y\} = \{B\} \tag{I-9}$$

and solve for Δy .

River-flow dynamics

Governing Equation: Momentum

The dynamic equation for river flow is as follows :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{Q^2}{A} \right) + gA \left(\frac{\partial y}{\partial x} + S_f \right) = 0 \quad (\text{I-10})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2\alpha \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \alpha \left(\frac{Q}{A} \right)^2 \frac{\partial A}{\partial x} + gA \frac{\partial y}{\partial x} + gAS_f = 0$$

where $S_f = \frac{Q|Q|}{K^2}$ and $K = k_s AR^{2/3}$ (I-11)

Governing Equation: Continuity

The continuity equation for river flow may be written as:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q_t \quad (\text{I-12})$$

Working Equation

Discretization of Eqn.(I-12) and (I-10) using 4-point Preissmann scheme gives:

$$A\Delta y_{i+1} + B\Delta Q_{i+1} = C\Delta y_i + D\Delta Q_i + G \quad (\text{I-13})$$

$$AA\Delta y_{i+1} + BB\Delta Q_{i+1} = CC\Delta y_i + DD\Delta Q_i + GG \quad (\text{I-14})$$

where the coefficients of reach A, B, C, D, G and AA, BB, CC, DD, GG are known quantities. Detailed derivation of these coefficients are explained in Appendix A.

The Double Sweep Method

Forward Sweep

Solving Eqns.(I-13) & (I-14) for Δy_i by eliminating ΔQ_i gives the following relationship:

$$\Delta y_i = L_i \Delta y_{i+1} + M_i \Delta Q_{i+1} + N_i \quad (\text{I-15})$$

where
$$L_i = \frac{A(DD) - (AA)D}{denom} \quad (\text{I-16a})$$

$$M_i = \frac{B(DD) - (BB)D}{denom} \quad (\text{I-16b})$$

$$N_i = \frac{D(GG) - (DD)G}{denom} \quad (\text{I-16c})$$

$$denom = C(DD) - (CC)D \quad (\text{I-16d})$$

Define the following relation:

$$\Delta Q_i = E_i \Delta y_i + F_i + H_i \Delta y_1 \quad (\text{I-17})$$

Substitution of Eqn.(I-17) into (I-13) and then followed by substitution of Eqn.(I-15) into the resulting equation yields

$$\Delta Q_{i+1} = E_{i+1} \Delta y_{i+1} + F_{i+1} + H_{i+1} \Delta y_1 \quad (\text{I-18})$$

where
$$E_{i+1} = \frac{-A + (factor)L_i}{denom} \quad (\text{I-19a})$$

$$F_{i+1} = \frac{DF_i + G + (factor)N_i}{denom} \quad (\text{I-19b})$$

$$H_{i+1} = \frac{DH_i}{denom} \quad (\text{I-19c})$$

$$factor = C + DE_i \quad (\text{I-19d})$$

$$denom = B - (factor)M_i \quad (\text{I-19e})$$

Define the following relation:

$$\Delta Q_1 = EE_i \Delta y_i + FF_i + HH_i \Delta y_1 \quad (\text{I-20})$$

Substitution of Eqn.(I-18) into Eqn.(I-15) and then followed by substitution into Eqn.(I-20) yields

$$\Delta Q_1 = EE_{i+1} \Delta y_{i+1} + FF_{i+1} + HH_{i+1} \Delta y_1 \quad (\text{I-21})$$

$$\text{where } EE_{i+1} = EE_i(L_i + E_{i+1}M_i) \quad (\text{I-22a})$$

$$FF_{i+1} = FF_i + EE_i(F_{i+1}M_i + N_i) \quad (\text{I-22b})$$

$$HH_{i+1} = HH_i + EE_iH_{i+1}M_i \quad (\text{I-22c})$$

Eqns.(I-19) and (I-22) show a recursive relation in which the coefficients of influence E_i , EE_i , F_i , FF_i , and H_i , HH_i are depended on the previous values. So to start the computation, one must initialize the coefficients. This can be done by rewriting Eqns.(I-13) and (I-14) for points 1 & 2 as follows

$$A\Delta y_2 + B\Delta Q_2 = C\Delta y_1 + D\Delta Q_1 + G \quad (\text{I-23})$$

$$AA\Delta y_2 + BB\Delta Q_2 = CC\Delta y_1 + DD\Delta Q_1 + GG \quad (\text{I-24})$$

Solving Eqns.(I-23) and (I-24) for ΔQ_2 by eliminating ΔQ_1 yields

$$\Delta Q_2 = E_2\Delta y_2 + F_2 + H_2\Delta y_1 \quad (\text{I-25})$$

$$\text{where } E_2 = \frac{A(DD) - (AA)D}{denom} \quad (\text{I-26a})$$

$$F_2 = \frac{D(GG) - (DD)G}{denom} \quad (\text{I-26b})$$

$$H_2 = \frac{D(CC) - (DD)C}{denom} \quad (\text{I-26c})$$

$$denom = (BB)D - B(DD) \quad (\text{I-26d})$$

Solving Eqns.(I-23) and (I-24) for ΔQ_1 by eliminating ΔQ_2 yields

$$\Delta Q_1 = EE_2\Delta y_2 + FF_2 + HH_2\Delta y_1 \quad (\text{I-27})$$

$$\text{where } EE_2 = \frac{A(BB) - (AA)B}{denom} \quad (\text{I-28a})$$

$$FF_2 = \frac{B(GG) - (BB)G}{denom} \quad (\text{I-28b})$$

$$HH_2 = \frac{B(CC) - (BB)C}{denom} \quad (\text{I-28c})$$

$$\text{denom} = (BB)D - B(DD) \quad (\text{I-28d})$$

Derivation of Equation (I-1)

Let use subscript (i, lp) to denote point i on river lp , and LP denotes the last river on a link, and $II(lp)$ denotes the last point on river lp .

$$\text{Rewrite Eqn.(I-17) as } \Delta Q_{i,lp} = E_{i,lp} \Delta y_{i,lp} + F_{i,lp} + H_{i,lp} \Delta y_{1,lp} \quad (\text{I-29})$$

Using the recursion relationship, Eqns.(I-18) & (I-19), and initial values, Eqn.(I-26), one may use Eqn.(I-29) up to the last point on river lp , and the result can be written as

$$\Delta Q_{II(lp),lp} = E_{II(lp),lp} \Delta y_{II(lp),lp} + F_{II(lp),lp} + H_{II(lp),lp} \Delta y_{1,lp} \quad (\text{I-30})$$

In general, the last point of a river is contiguous with an in-line node. For an in-line node continuity becomes

$$(Q_{1,lp+1} + \Delta Q_{1,lp+1}) - (Q_{II(lp),lp} + \Delta Q_{II(lp),lp}) + Q_j^{n+1} = 0 \quad (\text{I-31})$$

Substitution of Eqn.(I-30) into Eqn.(I-31) gives

$$(Q_{1,lp+1} + \Delta Q_{1,lp+1}) - (Q_{II(lp),lp} + E_{II(lp),lp} \Delta y_{II(lp),lp} + F_{II(lp),lp} + H_{II(lp),lp} \Delta y_{1,lp}) + Q_j^{n+1} = 0 \quad (\text{I-32})$$

The requirement of a common head at both points contiguous with an in-line node, j , is expressed as:

$$y_{II(lp),lp}^n + \Delta y_{II(lp),lp} = y_{1,lp+1}^n + \Delta y_{1,lp+1}$$

$$\text{or } \Delta y_{II(lp),lp} = \Delta y_{1,lp+1} + (y_{1,lp+1}^n - y_{II(lp),lp}^n) \quad (\text{I-33})$$

Substitution Eqn.(I-33) into Eqn.(I-32) yields

$$\Delta Q_{1,lp+1} = E_{II(lp),lp} \Delta y_{1,lp+1} + \{E_{II(lp),lp} (y_{1,lp+1}^n - y_{II(lp),lp}^n) + F_{II(lp),lp} - Q_{1,lp+1} + Q_{II(lp),lp} - Q_j^{n+1}\} + H_{II(lp),lp} \Delta y_{1,lp}$$

and recognizing it as

$$\Delta Q_{1,lp+1} = E_{1,lp+1} \Delta y_{1,lp+1} + F_{1,lp+1} + H_{1,lp+1} \Delta y_{1,lp} \quad (\text{I-34})$$

$$\text{where } E_{1,\ell p+1} = E_{II(\ell p),\ell p} \quad (\text{I-35a})$$

$$F_{1,\ell p+1} = E_{II(\ell p),\ell p} (y_{1,\ell p+1}^n - y_{II(\ell p),\ell p}^n) + F_{II(\ell p),\ell p} - Q_{1,\ell p+1} + Q_{II(\ell p),\ell p} - Q_j^{n+1} \quad (\text{I-35b})$$

$$H_{1,\ell p+1} = H_{II(\ell p),\ell p} \quad (\text{I-35c})$$

Thus, using Eqn.(I-34) in a forward sweep fashion starting from the first river up to the last computational point of the last river on a link, one may write Eqn.(I-34) as

$$\Delta Q_{II(LP),LP} = E_{II(LP),LP} \Delta y_{II(LP),LP} + F_{II(LP),LP} + H_{II(LP),LP} \Delta y_{1,1} \quad (\text{I-36})$$

and this is basically Eqn.(I-1) with different notation !

Derivation of Equation (I-2)

Rewrite Eqn.(I-20) as

$$\Delta Q_{1,\ell p} = EE_{i,\ell p} \Delta y_{i,\ell p} + FF_{i,\ell p} + HH_{i,\ell p} \Delta y_{1,\ell p} \quad (\text{I-37})$$

At the last point of river lp , Eqn.(I-37) becomes

$$\Delta Q_{1,\ell p} = EE_{II(\ell p),\ell p} \Delta y_{II(\ell p),\ell p} + FF_{II(\ell p),\ell p} + HH_{II(\ell p),\ell p} \Delta y_{1,\ell p} \quad (\text{I-38})$$

The requirement of a common head at both points contiguous with an in-line-node is expressed as Eqn.(I-33) and substitution into Eqn.(I-38) yields

$$\Delta Q_{1,\ell p} = EE_{II(\ell p),\ell p} \Delta y_{1,\ell p+1} + EE_{II(\ell p),\ell p} (y_{1,\ell p+1}^n - y_{II(\ell p),\ell p}^n) + FF_{II(\ell p),\ell p} + HH_{II(\ell p),\ell p} \Delta y_{1,\ell p} \quad (\text{I-39})$$

and recognizing it as

$$\Delta Q_{1,\ell p} = EE_{1,\ell p+1} \Delta y_{1,\ell p+1} + FF_{1,\ell p+1} + HH_{1,\ell p+1} \Delta y_{1,\ell p} \quad (\text{I-40})$$

$$\text{where } EE_{1,\ell p+1} = EE_{II(\ell p),\ell p} \quad (\text{I-41a})$$

$$FF_{1,\ell p+1} = EE_{II(\ell p),\ell p} (y_{1,\ell p+1}^n - y_{II(\ell p),\ell p}^n) + FF_{II(\ell p),\ell p} \quad (\text{I-41b})$$

$$HH_{1,\ell p+1} = HH_{II(\ell p),\ell p} \quad (\text{I-41c})$$

Using Eqn.(I-40) starting from the first river to the last river by mean of recursion relationship, Eqns.(I-22) and (I-28), gives the following result

$$\Delta Q_{I,1} = EE_{II(LP),LP} \Delta y_{II(LP),LP} + FF_{II(LP),LP} + HH_{II(LP),LP} \Delta y_{1,1} \quad (I-42)$$

and this is basically Eqn.(I-2) with different notation !

Return Sweep to calculate discharge correction

Recall that from Eqn.(I-9) : $[A]\{\Delta y\} = \{B\}$ we can calculate Δy for all link-nodes. At each link the computation proceeds as follows :

1. $\Delta Q_{II(LP),LP}$ is computed from Eqn.(I-36) as follows

$$\Delta Q_{II(LP),LP} = E_{II(LP),LP} \Delta y_{II(LP),LP} + F_{II(LP),LP} + H_{II(LP),LP} \Delta y_{1,1} \quad (I-36)$$

2. Continue until the first point of the last pipe using Eqn.(I-15)

$$\Delta y_{i,LP} = L_{i,LP} \Delta y_{i+1,LP} + M_{i,LP} \Delta Q_{i+1,LP} + N_{i,LP} \quad (I-15)$$

3. Proceed to the last point of pipe ($LP-1$) where

$$y_{II(LP-1),LP-1}^n + \Delta y_{II(LP-1),LP-1} = y_{1,LP}^n + \Delta y_{1,LP}$$

or rewrite as $\Delta y_{II(LP-1),LP-1} = (y_{1,LP}^n - y_{II(LP-1),LP-1}^n) + \Delta y_{1,LP} \quad (I-43)$

4. Then compute $\Delta Q_{II(LP-1),LP-1}$ using Eqn.(I-36) with $LP-1$ replaces LP .

5. Repeat step 1 and 4 until $\Delta y_{2,1}$ is recovered.

Step 1 to 5 are repeated for each link in a river network.

DAFTAR PUSTAKA

- Abbott, M B (1979), "Computational Hydraulics Elements of the Theory of Free Surface Flows," Pitman Advanced Publishing Program, Boston • London • Melbourne.
- Brebbia, C.A. and A. Ferrante (1983), "Computational Hydraulics," Butterworths, London.
- Carnahan, Brice, H. A. Luther, James O. Wilkes (1969), "Applied Numerical Methods," John Wiley & Sons, New York • Chichester • Brisbane • Toronto • Singapore.
- Cunge, J. A., F. M. Holly, Jr., and A. Verwey (1980), "Practical Aspects of Computational River Hydraulics," Pitman Advanced Publishing Program, Boston • London • Melbourne.
- Djoko Luknanto (1992), "Angkutan Limbah," Universitas Gadjah Mada, Pusat Antar Universitas, Ilmu Teknik, Bahan Kuliah.
- Djoko Luknanto (1992), "Numerical Simulation of Saturated Groundwater Flow and Pollutant Transport in Karst Regions," Ph.D. Dissertation, Iowa Institute of Hydraulic Research, Civil and Environmental Engineering, The University of Iowa, Iowa City, IA 52242, U.S.A.
- Harr, Milton E. (1962), "Groundwater and Seepage," McGraw-Hill Book Company, New York.
- Henderson, F.M. (1966), "Open Channel Flow," Macmillan Publishing Co., Inc.
- Holly Jr., Forrest M. and Preissmann, Alexandre (1977), "Accurate Calculation of Transport in Two Dimensions," Journal of the Hydraulics Division, Vol. 103, No. HY11, pages 1259-1276.
- Koutitas, Christopher G. (1983), "Elements of Computational Hydraulics," Pentech Press, USA: Chapman and Hall, New York.

Sauvaget, Patrick (1982), "Dispersion in Rivers and Coastal Waters – 2. Numerical Computation of Dispersion," *Developments in Hydraulic Engineering – 3*, Chapter 2, Elsevier Applied Science, London and New York.

Usseglio-Polatera, J.M. and Chenin-Mordojovich, M.I. (1988), "Fractional Steps and Process Splitting Methods for Industrial Codes," *Developments in Water Science 36, Computational Methods in Water Resources, Vol. 2 Numerical Methods for Transport and Hydrologic Processes*, Editors: Celia, M.A., et. al., pages 167–172

White, Frank M. (1979), "Fluid Mechanics," McGraw-Hill Book Company, New York, Second Edition.

"Computational Hydraulics," Course# 53:273, A lecture given by Prof. Forrest M. Holly Jr., Iowa Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa, Iowa 52242, USA.

"The Programmer's Companion," PRIME FORTRAN 77, Revision 18, Prime Computer, Inc., 1982.

Burnett, David S. (1987), *Finite Element Analysis From Concepts to Applications*, Addison-Wiley Publishing Company, Reading, Massachusetts.

----- (1975), *Unsteady Flow in Open Channels, Volume I*, Edited by K. Mahmood and V. Yevjevich, Water Resources Publications, P.O.Box 303, Fort Collins, Colorado 80522, USA.

----- (1982), *Engineering applications of computational hydraulics vol 1 Homage to Alexandre Preissmann*, Edited by M B Abbott and J A Cunge, Pitman Advanced Publishing Program, Boston • London • Melbourne.