METODA NUMERIK

oleh

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.

November 2001

Bahan kuliah Metoda Numerik
Jurusan Teknik Sipil FT UGM
Yogyakarta

PRAKATA

Buku berjudul “Metoda Numerik” ini merupakan bahan kuliah di Jurusan Teknik Sipil FT UGM. Buku ini tidak menjelaskan secara rinci teori-teori numerik secara lengkap, namun hanya membahas teori-teori numerik yang sering digunakan di lapangan. Pembaca yang ingin mengetahui secara lengkap Metoda Numerik diharapkan mencari dari acuan-acuan di luar buku ini.

Buku ini lebih merupakan petunjuk praktis bagi mahasiswa S1 maupun praktisi di lapangan. Dalam buku ini prinsip umum teori-teori numerik dijelaskan secara singkat, kemudian aplikasinya dijelaskan.

Semoga buku kecil ini berguna, kritik membangun sangatlah diharapkan.

Yogyakarta, November 2001
Dosen Jurusan Teknik Sipil FT UGM

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
Penyusun

DAFTAR ISI

halaman

DAFTAR GAMBAR

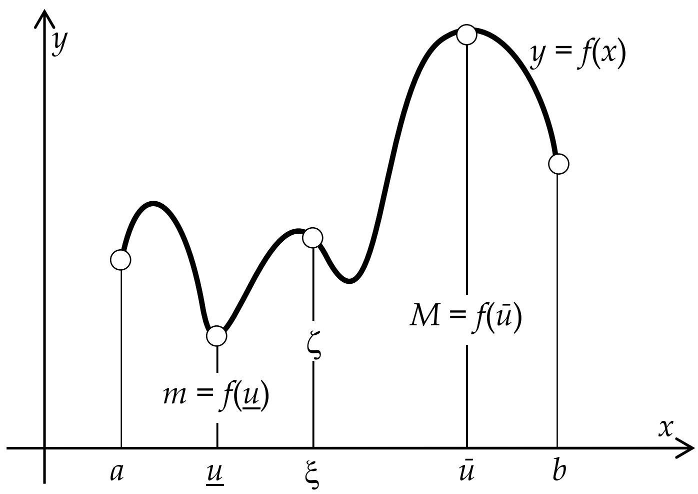
halaman

Bab
1. ERROR: ASAL & RAMBATANNYA

1.1. Pendahuluan

Teorema 1.1.: 'Nilai Antara' (lihat Gambar 1)

Jika $f(x)$ suatu fungsi menerus pada $x \in [a,\ b]$ dan $m = \underset{a \le x \le b}{Infimum}\ f(x)$ serta $M = \underset{a \le x \le b}{Supremum}\ f(x)$, maka untuk setiap bilangan ζ pada interval tertutup $[m, M]$ paling tidak ada satu titik $\xi \in$ [a,b] sehingga $f(\xi) = \zeta$. Khususnya ada dua titik $\underline{u}$ & $\bar{u} \in [a, b]$ dimana $m = f(\underline{u})$ dan $M = f(\bar{u})$



Gambar 1 Teorema Nilai Antara

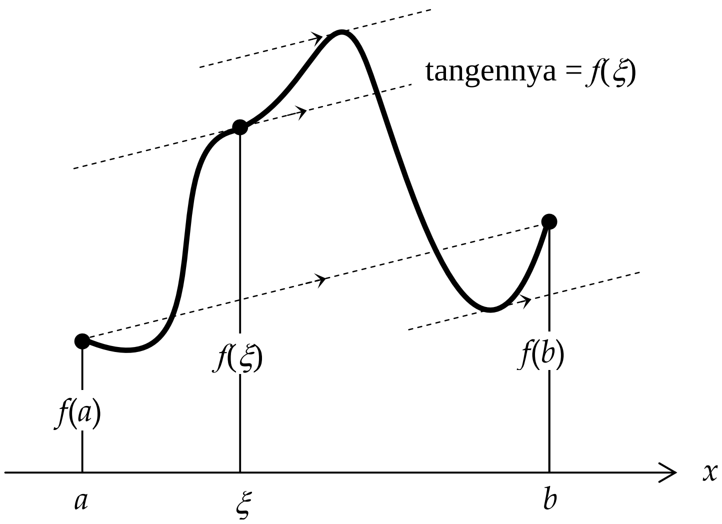
Teorema 1.2.: 'Nilai Tengah' (lihat Gambar 2)

Jika $f(x)$ menerus pada interval $[a,b]$ serta turunan pertamanya ada dalam interval $x \in (a,b)$. Maka paling tidak ada satu titik $\xi \in (a,b)$ dimana:

$$f^{'}(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema 1.3: 'Nilai Tengah Integral' (lihat Gambar 3)

Jika $w(x)$ tidak negatif dan dapat dihitung integralnya pada interval $[a,b]$ dan $f(x)$ menerus pada $[a,b]$, maka $\int_a^b w(x) f(x) dx = f(\xi) \int_a^b w(x) dx$ untuk satu titik $\xi \in [a,b]$



Gambar 2 Teorema Nilai Tengah

Teorema 1.4.: 'Deret Taylor' (lihat Gambar 4)

Jika $f(x)$ mempunyai n+1 turunan dan turunannya selalu menerus pada $[a,b]$, dan jika x, $x_0 \in [a,b]$, maka:

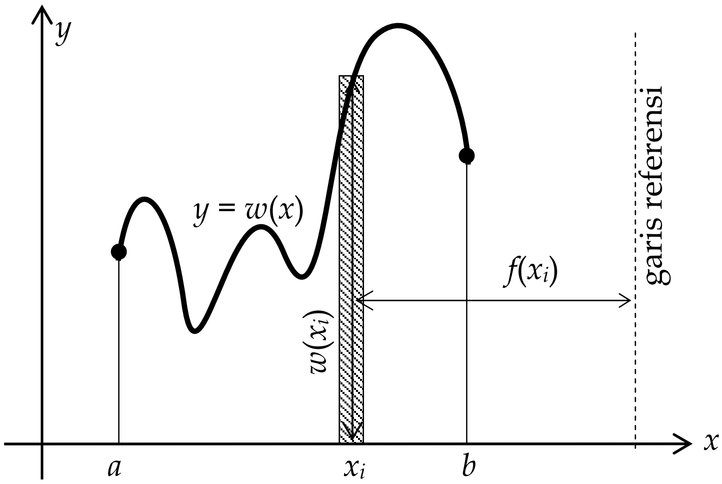
$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

dengan $$P_n(x) = f(x_o) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_o) + \ldots + \frac{(x - x_o)^n}{n!} f^{(n)}(x_o)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$

$$= \frac{(x-x_o)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

untuk ξ diantara x_o dan x.



Gambar 3 Nilai Tengah Integral

Bukti: $\int_{x_o}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_o)$

Jadi:

$$f(x) = f(x_o) + \int_{x_o}^{x} f'(t)dt \quad \text{ingat}: \int udv = uv - \int vdu$$

$$= \ldots + tf'(t)\Big]_{t=x_o}^{t=x} - \int_{x_o}^{x} tdf'(t)$$

$$= \ldots + (x-x_o)f'(x_o) + x(f'(x) - f'(x_o) - \int_{x_o}^{x} tf''(t)dt$$

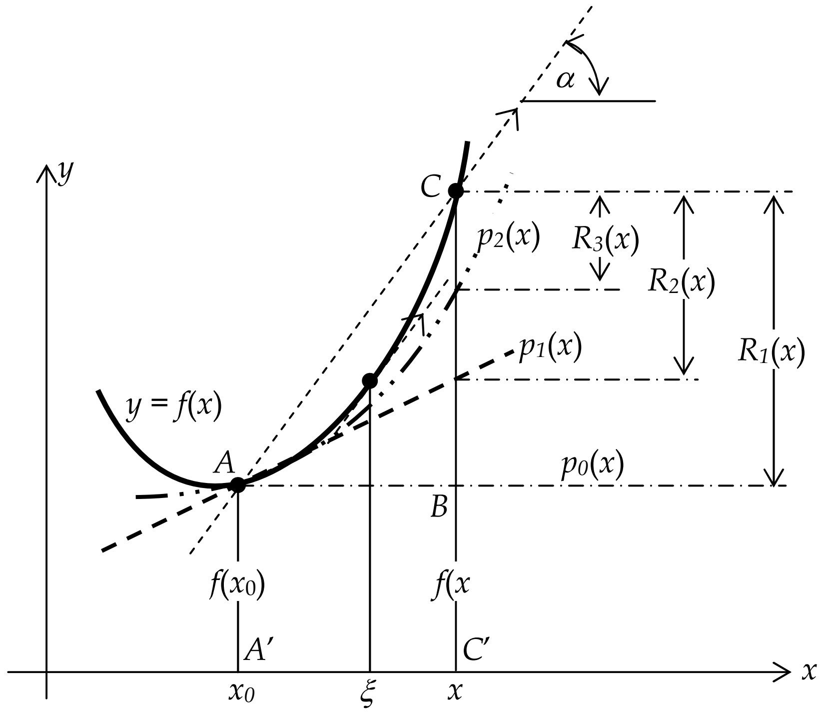
$$= \ldots + (x-x_o)f'(x_o) + x\int_{x_o}^{x} f''(t)dt - \int_{x_o}^{x} tf''(t)dt$$

Akhirnya diperoleh:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_o) f'(x_o) + \int_{x_o}^{x} (x - t) f''(t) dt \quad \text{... dst.}$$

$$= \ldots + \frac{1}{2} \int_{x_o}^{x} f''(t) d(x - t)^2 \quad \text{... dst.}$$

$$f(x) = f(x_o) + \frac{x - x_o}{1!} f(\xi)$$



Gambar 4 Interpretasi Deret Taylor secara geometris

Secara geometris artinya:

$$CC' = AA' + \underbrace{A'C' \tan\alpha}_{\text{kesalahan pemotongan}}$$

$$= AA' + A'C' \times \frac{BC}{AB}$$

$$= \underbrace{AA'}_{p_0(x)} + \underbrace{BC}_{R_1(x) = (x - x_0) f'(\xi)}$$

Jadi kesalahan pemotongan

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_o)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$
$$= \text{konstanta} \times (x-x_o)^{n+1}$$
$$= \text{konstanta} \times \Delta x^{n+1}$$

$R_{n+1}(x)$ disebut sebagai kesalahan pemotongan order n+1 atau $O(\Delta x^{n+1})$.

1.2. Bilangan Dalam Komputer

Komputer menyajikan bilangan dalam 2 mode yaitu (1) Integer, (2) Floating point.

Basis bilangan yang digunakan dalam komputer jarang sekali yang decimal (basis 10). Hampir semua komputer memakai basis 2 (binari) atau variannya seperti basis 8 (octal) dan basis 16 (hexadecimal).

Contoh:

a. Pada basis 2, semua bilangan terdiri dari 2 angka yaitu 0 dan 1.
   Jadi $(11011.01)_2 = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 + 0.2^{-1} + 1.2^{-2} = 27.25$
b. Pada basis 16, semua bilangan terdiri dari/dinyatakan dengan angka 0, 1, …, 9, *A*,*B*, … ,*F*
   Jadi $(56C.F)_{16} = 5.16^{12} + 6.16^1 + 12.16^0 + 15.16^{-1} = 1338.9375$

Jika basis bilangan suatu komputer adalah β, maka suatu bilangan non-zero x disimpan didalam bentuk.

$$x = \sigma\, (.a_1a_2a_3 \ldots a_t)_\beta \,.\, \beta^e$$

dengan σ = -1 atau + 1, $0 \le a_1 \le \beta-1$, e = integer, dan

$$\left(\bullet\, a_1a_2a_3\cdots a_t\right) = \frac{a_1}{\beta^1} + \frac{a_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{a_t}{\beta^t}$$

dengan σ disebut tanda, e disebut eksponen → $L \le e \le U$, $(\bullet a_1a_2a_3 \ldots a_t)$ disebut mantissa, dan • disebut radix.

Akurasi dari sajian 'floating-point' suatu komputer. Unit pembulatan, δ, suatu komputer adalah suatu bilangan positip terkecil yang mempunyai sifat bahwa

$$1 + \delta > 1$$

Nilai nol, ε, suatu komputer adalah suatu bilangan positip terkecil dimana

$$1 + \varepsilon > 1$$

Secara praktis ε dan δ dapat dihitung sbb:

```
         ε = 1.0
    10   ε = ε/2.0
         If (1.0 + ε .GT. 1.0) GOTO 10
         δ = ε * 2.0
```

1.2.1. Underflow and Overflow

Jika suatu bilangan tidak mampu direpresentasikan oleh komputer karena $e < L$ atau $e > U$, maka akan terjadi under/overflow.

Jadi setiap bilangan harus berada dalam interval

$$x_L \le |x| \le x_U$$

dengan $x_L = \beta^{L-1}$ dan $x_U = (1 - \beta^{-t})\beta^{L-1}$

Dalam FORTRAN:

- Jika suatu hasil hitungan, $|x| \ge x_U$, maka akan terjadi 'overflow error' dan program akan berhenti.
- Jika suatu hasil hitungan, $|x| \ge x_L$, maka akan terjadi 'underflow error' biasanya x nilainya menjadi nol dan hitungan terus berlanjut.

1.3. Definisi dan Asal 'error'

Dalam penyelesaian suatu masalah, dikehendaki jawaban yang sejati, yang disimbolkan sebagai x_T, tetapi biasanya jawaban pendekatanlah yang didapat (ini disimbolkan sebagai x_A).

$$Error(x_A) \equiv x_T - x_A$$

Untuk banyak keperluan, bukan 'error' mutlak yang dikehendaki melainkan 'error' relatif dari x_A yang dibutuhkan:

$$\text{Rel}(x_A) \equiv \frac{x_T - x_A}{x_T}, x_T \ne 0$$

Contoh: $x_T = e = 2.7182818\ldots,\ \ x_A = \frac{19}{7} = 2.7142857\ldots$

Jadi: $\text{Error}(x_A) = 0.003996\ldots,\ \ \text{Rel}(x_A) = 0.00147\ldots$

1.3.1. Angka signifikan (significant digits)

Nilai x_A dikatakan mempunyai m angka signifikan terhadap x_T, jika kesalahan (x_T-x_A) mempunyai nilai ≤ 5 pada angka ke (m+1) dihitung ke kanan dari angka non-zero didalam x_T.

Contoh:

1) $x_T = \frac{1}{3} = 0.\underset{\Uparrow}{\overset{1}{3}}3333\ldots,\quad x_A = 0.333,\quad \left|x_T - x_A\right| = 0.\overset{1}{0}\overset{2}{0}\overset{3}{0}\underset{\Uparrow}{\overset{4}{3}}$

   karena pada angka ke 4 kesalahannya < 5, maka x_A dikatakan mempunyai 3 angka signifikan, sehingga $x_A = 0.333$.

2) $x_T = \underset{\Uparrow}{\overset{1}{2}}3.496 \quad x_A = 23.494 \quad \left|x_T - x_A\right| = \overset{1}{0}\overset{2}{0}.\overset{3}{0}\overset{4}{0}\underset{\Uparrow}{\overset{5}{2}}$

   karena pada angka ke 5 kesalahannya < 5, maka x_A dikatakan mempunyai 4 angka signifikan, sehingga $x_A = 23.49$.

3) $x_T = 0.0\underset{\Uparrow}{\overset{1}{2}}138 \quad x_A = 0.02144 \quad \left|x_T - x_A\right| = 0.0\overset{1}{0}\overset{2}{0}\underset{\Uparrow}{\overset{3}{0}}6$

   karena pada angka ke 3 kesalahannya < 5, maka x_A dikatakan mempunyai 2 angka signifikan, sehingga $x_A = 0.021$.

1.3.2. Asal dari 'error'

1. Simplifikasi dan asumsi yang digunakan untuk merubah peristiwa alam ke dalam formula matematik.
2. Kesalahan/keteledoran : kesalahan aritmatik dan programming.
3. Ketidakpastian dalam data.
4. Kesalahan mesin.
5. Kesalahan matematis dalam kesalahan pemotongan

1.4. Rambatan 'Error'

- Ditentukan semua operasi aritmatik digantikan dengan tanda ω. Jadi ω: + - × / dan ŵ: + - × / → versi komputer
- Misalkan x_A dan y_A adalah bilangan yang akan digunakan dan kesalahannya terhadap x_T dan x_T adalah

$$\varepsilon = x_T - x_A \quad \text{dan} \quad \eta = y_T - y_A$$

- Jika dilakukan hitungan x_A ŵ y_A, maka kesalahannya adalah

  $$x_T\ \omega\ y_T - x_A\ \hat{w}\ y_A = \underbrace{\left(x_T\ \omega\ y_T - x_A\ \omega\ y_A\right)}_{\text{I}} + \underbrace{\left(x_A\ \omega\ y_A - x_A\ \hat{w}\ y_A\right)}_{\text{II}}$$

  I = kesalahan karena rambatan ('propagated error')

  II = kesalahan karena 'rounding' ataupun 'choping'

1.4.1. 'Propagated Error' pada Perkalian

$$x_T y_T - x_A y_A = x_T y_T - (\chi_T - \varepsilon)(y_T - \eta)$$
$$= x_T \eta + y_T \varepsilon - \varepsilon\eta$$
$$\text{Rel}(x_A y_A) \equiv \frac{x_T y_T - x_A y_A}{x_T y_T} = \frac{\eta}{y_T} + \frac{\varepsilon}{x_T} - \frac{\varepsilon\eta}{\chi_T y_T}$$
$$= \text{Rel}(x_A) + \text{Rel}(y_A) - \text{Rel}(x_A).\text{Rel}(y_A)$$

Jika $\left|\text{Rel}(x_A)\right|, \left|\text{Rel}(y_A)\right| << 1$, maka $\text{Rel}(x_A y_A) = \text{Rel}(x_A) + \text{Rel}(y_A)$

1.4.2. 'Propagated Error' pada Pembagian

$$\text{Rel}(\frac{x_A}{y_A}) \equiv \frac{\frac{x_T}{y_T} - \frac{x_A}{y_A}}{\frac{x_T}{y_T}} = \frac{\frac{x_T}{y_T} - \frac{x_T - \varepsilon}{y_T - \eta}}{\frac{x_T}{y_T}}$$
$$= 1 - \frac{(x_T - \varepsilon) y_T}{(y_T - \eta) x_T} = \frac{x_T y_T - \eta.x_T - x_T y_T + \varepsilon.y_T}{x_T y_T - \eta.x_T}$$
$$\text{Rel}(\frac{x_A}{y_A}) = \frac{\text{Rel}(x_A) - \text{Rel}(y_A)}{1 - \text{Rel}(y_A)}$$

Jika $\left|\text{Rel}(y_A)\right| << 1$, maka $\text{Rel}(\frac{x_A}{y_A}) = \text{Rel}(x_A) - \text{Rel}(y_A)$

Tampak bahwa pada perkalian dan pembagian 'kesalahan relatif' tidak membesar secara cepat.

1.4.3. 'Propagated Error' pada Penjumlahan dan Pengurangan

$$(x_T \pm y_T) - (x_A \pm y_A) = (x_T - x_A) \pm (y_T - y_A) = \varepsilon \pm \eta$$
$$Error(x_A \pm y_A) = Error(x_A) \pm Error(y_A)$$

Penjabaran ini tampak logis tetapi tidak baik karena tidak dinyatakan dalam 'kesalahan relatif'

Contoh: $x_T = \pi, x_A = 3.1416, y_T = \dfrac{22}{7}, y_A = 3{,}1429$

$x_T - x_A = -7.35 \times 10^{-6}$ $\quad$ $\mathrm{Rel}(x_A) = -2.34 \times 10^{-6}$

$y_T - y_A = -4.29 \times 10^{-5}$ $\quad$ $\mathrm{Rel}(y_A) = -1.36 \times 10^{-5}$

$$(x_T - y_T) - (x_A - y_A) = -0.0012645 - (-0.0013)$$
$$= 3.55 \times 10^{-5}$$

$\mathrm{Rel}(x_A - y_A) = -0.028$

Jadi meskipun kesalahan pada $(x_A - y_A)$ adalah kecil, tetapi 'kesalahan relatif'nya cukup besar melebihi Rel(x_A) ataupun Rel(y_A).

Bab
2. PERSAMAAN NON-LINIER

Di dalam matematika aplikasi pencarian akar persamaan $f(x)=0$ sering dijumpai. Biasanya jawaban analitis dari persamaan diatas tidak ada, sehingga harus dicari jawaban numeriknya yang biasa dilaksanakan dengan metode iterasi.

2.1. Metode Bagi Paruh (Bisection)

Jika terdapat suatu $f(x)$ yang menerus $\in [a,b]$ dan $f(a)f(b) < 0$, maka menurut Teorema 1.1 paling tidak $f(x)$ mempunyai satu akar $f(x)$ mempunyai satu akar $\in [a,b]$.

♦ **Algoritma**

Bisect(f, a, b, *akar*, ε)

1. Hitung $c := (a+b)/2$
2. Jika $b - c \le \varepsilon$, maka *akar*:= c, dan ' exit'
3. Jika {tanda $f(b)$•tanda $f(c)$} $\leqslant 0$, maka $a := c$, jika tidak $b := c$
4. Kembali ke langkah nomor 1.

♦ **Definisi**

Suatu deret hasil suatu iterasi $\{x_n \mid n \geqslant 0\}$ dikatakan menuju ke titik α dengan derajat $p \geqslant 1$, jika

$$\left|\alpha - x_{n+1}\right| \le c\left|\alpha - x_n\right|^p \quad n \ge 0$$

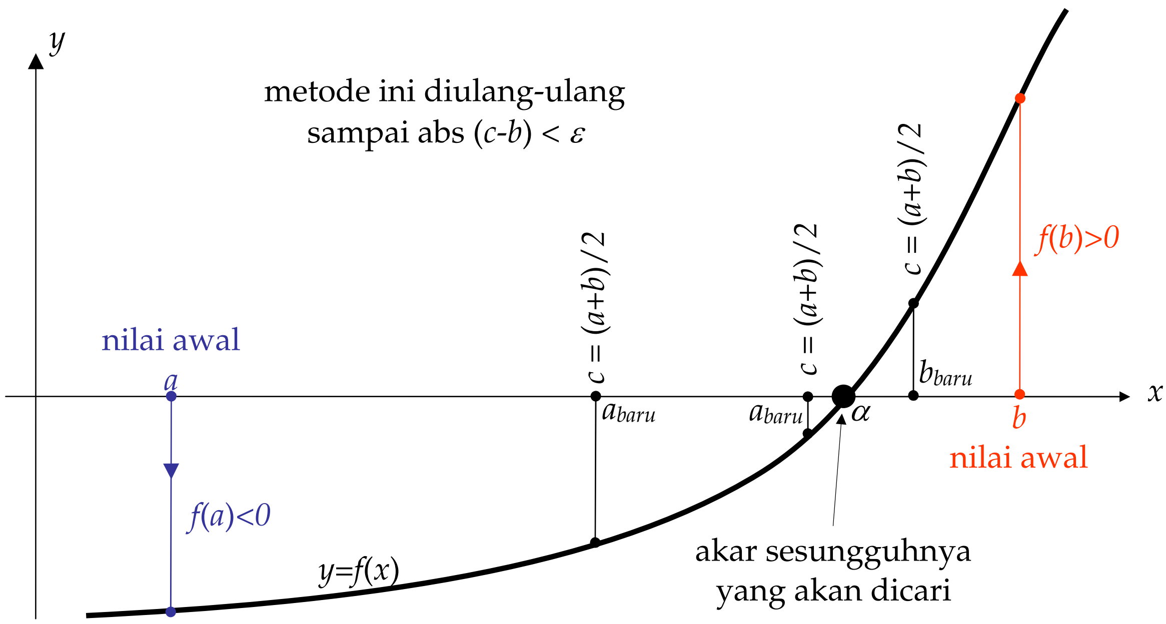
untuk beberapa nilai $c>0$. Jika $p=1$, deretnya disebut menuju ke titik α secara linier. Pada kasus ini diperlukan nilai $c<1$; c disebut laju linier dari x_n menuju α.

Ada beberapa metode yang membutuhkan definisi yang agak berbeda dengan diatas yaitu

$$\left|\alpha - x_{n+1}\right| \le c^n\left|\alpha - x_0\right| \quad n \ge 0$$

- Tingkat kelajuan metode bagi paruh dinyatakan dalam

$$|\alpha - c_n| \le (\frac{1}{2})^n (b-a)$$



Gambar 5 Metoda Bagi Paruh untuk mencari akar

2.2. Metode Newton

Deret Taylor:

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(x_n) + \ldots$$

atau menurut Teorema 1.4

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n) + \frac{1}{2}(x - x_n)^2 f''(\xi)$$

dengan ξ diantara x_n dan x.

Jika akar dari $f(x)$, salah satunya adalah α, maka

$$f(x = \alpha) = 0$$

$$f(x) = f(x_n) + (\alpha - x_n) f'(x_n) + \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 f''(\xi) = 0$$

jadi

$$\alpha = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}$$

maka α dapat didekati dengan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n \geq 0$$

dengan 'errornya'

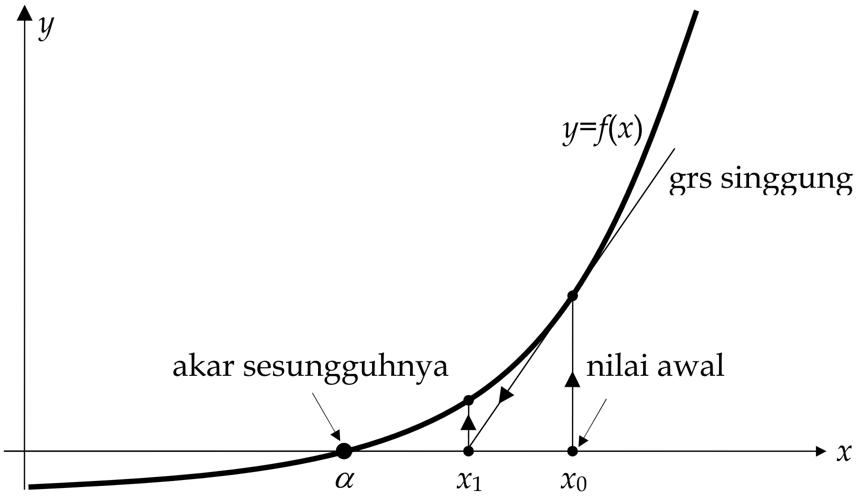
$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(\alpha - x_n)^2 \qquad n \geq 0$$

Untuk nilai $n \to \infty$, $\xi \to \alpha$ dan $x_n \to \alpha$, jadi

$$\alpha - x_{n+1} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(\alpha - x_n)^2$$

$$= \text{konstanta} \times (\alpha - x_n)^2$$

Sehingga metode Newton dikatakan mempunyai derajat kelajuan = 2



Gambar 6 Metoda Newton untuk mencari akar

- **Algoritma**

Newton (f, df, x_0, ε, *akar*, *itmax*, *ierr*)

1. Keterangan : *df* adalah $f'(x)$, *itmax* adalah iterasi maximum, *ierr* adalah 'error flag'
2. *noiter*:=1
3. *penyebut*:=$df(x_0)$
4. jika *penyebut* = 0 maka *ierr*:=2, dan 'exit'
5. $x_1 := x_0 - f(x_0)/penyebut$
6. jika $|x_1 - x_0| \leqslant \varepsilon$, maka *ierr*:= 0, *akar*:= x_1, dan 'exit'
7. jika *noiter* = *itmax* maka *ierr*:= 1, dan 'exit'
8. *noiter*:= *noiter* +1, $x_0 := x_1$, dan ulangi langkah 3.

2.3. Metode Sekan

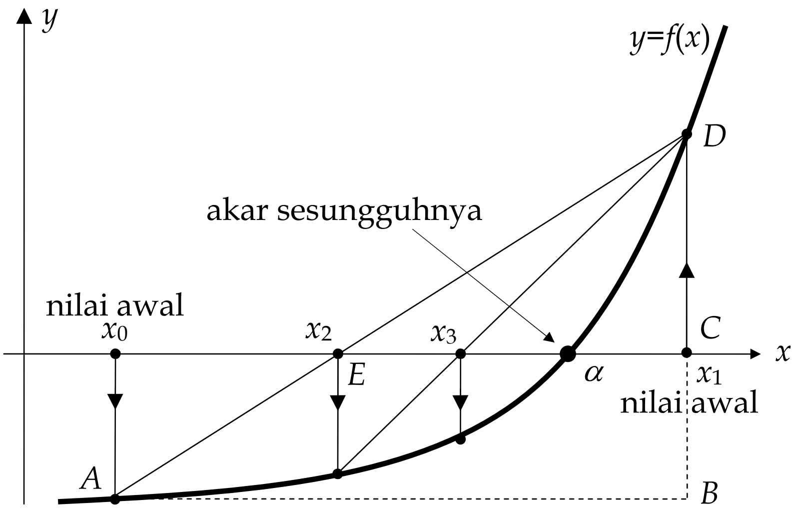
Dengan menggunakan sifat segitiga sebangun diperoleh

$$\frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CE}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2}$$

Jadi $x_2 = x_1 - f(x_1)\dfrac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$ atau

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \qquad n \geq 1$$



Gambar 7 Metoda Sekan untuk mencari akar

Metode sekan dapat dijabarkan dari metode Newton dimana

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Derajat Konvergensi:

- untuk metode Newton $p = 2$
- untuk metode sekan $p = ½(1+\sqrt{5}) = 1,618$
- untuk metode 'bisection' $p = 1$

2.4. Akar dari Persamaan Polinomial

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + a_n x)\ldots)) \qquad \text{(A)}$$

atau

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad \text{(B)}$$

Pada Pers.(A) terdapat n perkalian & pertambahan, sedangkan dalam Pers.(B) terdapat: $(2n-1)$ perkalian & pertambahan. Oleh karena itu dalam pemrograman komputer lebih disukai bentuk dalam Pers.(A), karena lebih efisien. Pers. (A) jika ditulis dalam FORTRAN menjadi

```
      p = a(n)
      do 10 i = n,1,-1
10       p = p*x + a(i-1)
```

Untuk menghitung akar dari persamaan $p(x) = 0$ akan digunakan Metoda Newton. Untuk keperluan itu polinomial $p(x)$ akan dimodifikasi sebagai berikut

Disyaratkan: $b_n = a_n$

$b_k = a_k + z b_{k+1}$, $\quad k = n-1, n-2, \ldots, 0$

Dari syarat ini $p(x)$ dapat ditulis sebagai

$$p(x) = b_0 + (x - z)q(x)$$

dengan $q(x) = b_1 + b_2 x + \ldots + b_n x^{n-1}$

sehingga $p'(x) = (x - z)q'(x) + q(x) \rightarrow p'(z) = q(z)$

♦ **Algoritma**:

Polynew (a, n, x, ε, $itmax$, $akar$, b, ier)

1. Keterangan: a adalah vektor coef. dengan dimensi n, $itmax$ adalah iterasi maksimum, b adalah vektor coef. dari polinomial yang baru, ier adalah indikator adanya error.
2. $noiter$: = 1
3. x: = x_0 , $b_n := c := a_n$
4. Untuk $k = n$-1, …, 1, $b_k := a_k + z b_{k+1}$, $c := b_k + zc$
5. $b_0 := a_0 + z b_1$
6. Jika $c = 0$, ier := 2, dan 'exit
7. $x_1 := x_0 - b_0/c$
8. Jika $|x_1 - x_0| \leq \varepsilon$, ier :=0 ,$akar$:= x_1, dan 'exit'

9. Jika *noiter*:= *itmax*, *ier*:= 1, dan 'exit'
10. *noiter*:= *noiter* + 1, $x_{0:}$= x_1 , ulangi langkah ketiga.

Bab 3. TEORI INTERPOLASI

Jika kita mempunyai satu set data:

$$(x_0, y_0)\ , (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$$

maka dalam bab ini akan di jelaskan bagaimana harus mencarti polinomial yang melalui, data di atas.

Jika polinomial ini ditulis sebagai:

$$p(\mathrm{x}) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

maka jika data diatas disubstitusikan akan didapat (n+1) persamaan dengan (n+1) variabel tidak diketahuinya yaitu:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & a_1x_0 & + & \cdots & + & a_nx_0^n & = & y_0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_0 & + & a_1x_n & + & \cdots & + & a_nx_n^n & = & y_n \end{array}$$

Persamaan diatas jika diselesaikan akan menghasilkan a_0, …, a_n sehingga polinomial $p(x)$ dapat dicari .

3.1. Metoda Beda Terbagi Newton

Notasi yang digunakan:

$$f[x_o, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_1, \ldots, x_n]}{x_n - x_0}$$

Contoh

Order 0: $f[x_0] = f[x_n]$

Order 1: $f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$

Order 2: $f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

Order 3: $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

Rumus beda terbagi Newton:

$$p_n(x) = f[x_0] + (x_3 - x_0) f[x_0, x_1] + (x_3 - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1] + \ldots$$
$$+ (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) f[\, x_0, x_1, \ldots, x_n \,]$$

Contoh: Kita buat tabel beda terbagi berdasarkan polinomial

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f_2[\,]$	$f_3[\,]$
0	0.0	-5.0	6	2	1
1	1.0	1.0	12	6	
2	3.0	25.0	30		
3	4.0	55.0			

Keterangan:

$$A = \frac{1-(-5)}{1-0} = 6 \qquad B = \frac{25-1}{3-1} = 12$$
$$C = \frac{55-25}{4-3} = 30 \qquad D = \frac{B-A}{3-0} = 2$$
$$E = \frac{30-12}{4-1} = 6 \qquad F = \frac{E-D}{4-0} = 1$$

Contoh hitungan $p_n(x{=}0.5) = ?$

- $p_1(x) = -5 + (x-0)6 = 6x - 5$
  $\therefore\ p_1\,(0.5) = -2$
- $p_2(x) = -5 + (x-0)6 + (x-0)(x-1)2 = 2x^2 + 4x - 5$
  $\therefore\ p_2\,(0.5) = -2{,}5$
- $p_3(x) = -5 + (x-0)6 + (x-0)(x-1)2 + (x-0)(x-1)(x-3)1 = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$
  $\therefore$ p$_2$ (0.5) = -15/8 = - 1.875

♦ Algoritma metoda beda terbagi Newton

Divdif $(d, x\,, n)$

1. Keterangan: d dan x adalah vektor $f(x_i)$ dan $x_i = 0,1,\ldots,n$. Pada saat 'exit' d_i akan terisi oleh nilai $f\,[x_0,\ldots,x_i]$
2. Kerjakan s/d langkah 4 untuk $i = 1, 2, \ldots, n$
3. Kerjakan sampai dengan langkah 4 untuk $j = n, n\text{-}1, i$
4. $d_j := (d_j - d_{j-1}) \,/\, (x - x_{j-1})$
5. 'exit'

Interp(d, x, t, p)

1. Keterangan: Pada awalnya d dan x adalah vektor dari $f[x_0,\ldots,x_i]$ dan x_i, i = 0, 1 , …, n. Pada saat 'exit' p akan berisi $p_n(t)$.
2. $p := d_n$
3. Kerjakan s/d langkah 4 untuk i = n-1 , n--2, …, 0
4. $p := d_i + (t - x_i)p$
5. ' exit'

3.2. Interpolasi dengan tabel beda hingga

3.2.1. Beda Maju

Notasi: $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$ dengan $x_i = x_0 + ih$, i = 0, 1, 2, 3, …
Untuk $r \geq 0$,

$$\Delta^{r+1} f(z) = \Delta^r f(z+h) - \Delta^r f(z)$$

$\Delta^r f(z)$ disebut ' beda maju order r ,' Δ disebut 'operator beda maju '

Contoh:
$$\begin{aligned}
\Delta^0 f(x) &= f(x)\\
\Delta f(x) &= \Delta^0 f(z+h) - \Delta^0 f(z)\\
&= f(x+h) - f(x)\\
\Delta^2 f(x) &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)
\end{aligned}$$

Contoh hitungan : Kita gunakan polinomial $x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ dengan h = 1,0

i	x_i	$f(x_i)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
0	0.0	-5.0	6	2	6	0
1	1.0	1.0	8	8	6	
2	2.0	9.0	16	14		
3	3.0	25.0	30			
4	4.0	55.0				

Korelasi antara 'beda maju' dengan ' beda terbagi'

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}$$

Secara umum: $f[x_0, x_1, ..., x_n] = \dfrac{\Delta^n f(x_0)}{n!\, h^n}$

Akan dijabarkan rumus interpolasi 'beda maju' dari rumus interpolasi 'beda terbagi' Newton. Didefinisikan $\alpha = \dfrac{x - x_0}{h}$ yang menunjukkan letak titik x terhadap x_0. Jadi misalnya α = 1.6, maka x terletak pada jarak 6/10 dari x_1 ke arah x_2.

Diinginkan rumus untuk:

$$(x - x_0)\ (x - x_1)\ \ldots\ (x - x_k)$$

dinyatakan dalam α

$$x - x_j = x_0 + \alpha h - (x_0 + jh) = (\alpha - j)h$$

Jadi

$$(x - x_0)\ (x - x_1)\ \ldots\ (x - x_k) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k)h^{k+1}$$

sehingga

$$p_n(x) = f_0 + \alpha h \frac{\Delta f_0}{h} + \alpha(\alpha - 1)h^2 \frac{\Delta^2 f_0}{2!\, h^2} + \ldots + \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)h^n \frac{\Delta^n f_0}{n!\, h^n}$$

Jika didefinisikan koefisien binomial sbb:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - k + 1)}{k!},\ k>0 \text{ dan } \binom{\alpha}{0} = 1$$

maka didapat rumus interpolasi 'beda maju' sbb:

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} \Delta^j f(x_0) \quad \text{dengan} \quad \alpha = \frac{x - x_0}{h}$$

Contoh hitungan: $p(x{=}1.5)$ = ?

$$\alpha = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.5 - 1.0}{1.0} = 1.5$$

1) $p_1(x) = f(x_0) + \alpha\Delta f(x_0)$
 = -5 + 1.5 (6) = 4

2) $p_2(x) = f(x_0) + \alpha\Delta f(x_0) + \alpha(\alpha-1)\Delta^2 f(x_0)/2!$
 = -5 + 1.5 (6) + 1.5 (0.5)2/2! = 4.75

3.2.2. Beda Mundur

Notasi: $\nabla f(z) = f(z) - f(z-h)$

$\nabla^{r+1} f(z) = \nabla^r f(z) - \nabla^r f(z-h) \quad r \geqslant 1$

Rumus interpolasinya

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{j-1-\alpha}{j} \nabla^j f(x_0) \quad \text{dengan } \alpha = \frac{x_0 - x}{h}, \binom{-1-\alpha}{0} = 1$$

i	x_i	$f(x_i)$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$
-4	0.0	-5.0	6	2	6	0
-3	1.0	1.0	8	8	6	
-2	2.0	9.0	16	14		
-1	3.0	25.0	30			
0	4.0	55.0				

Contoh hitungan: $p(x=3.5) = ?$

$$\alpha = \frac{x_0 - x}{h} = \frac{-3.5 + 4.0}{1.0} = 0.5$$

1) $p_1(x) = f(x_0) + (-\alpha)\nabla f(x_0)$

$= 55 + (-0.5)\, 30 = 40$

2) $p_2(x) = p_1(x) + (-\alpha)(-\alpha+1)\nabla^2 f(x_0)/2!$

$= 40 + (-0.5)(0.5)14/2! = 38.25$

3) $p_3(x) = p_2(x) + (-\alpha)(-\alpha+1)\,(-\alpha+2)\nabla^3 f(x_0)/3!$

$= 38.25 + (-0.5)(0.5)(1.5)6/3! = 37.875$

3.3. Lagrange

Polinomial Lagrange dibentuk dengan fomulasi berikut:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i = 0,1,\ldots,n$$

Contoh:

$$p_i(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x - x_{01}} f(x_1)$$

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_{12})} f(x_2)$$

Contoh: hitung $p_2(x)$ yang melalui titik-titik $(0,15);(1,1);(3,25)$

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)}=\frac{x^2-4x+3}{3}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}=\frac{x^2-3x}{-2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_{01})(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}=\frac{x^2-x}{6}$$

Jadi $p_2(x)=L_0(x)\times(-5)+L_1(x)\times(1)+L_2(x)\times(25)=2x^2+4x-5$

3.4. Beberapa fakta penting dari'beda terbagi'

1. $f[x_0,x_1,.....,x_m]=\dfrac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$ untuk $\xi\in X\{x_0,x_1,...,x_n\}$ dimana $X\{x_0,...,x_m\}$ artinya interval terkecil dimana $x_0,x_1,...,x_m$ tercakup!
   Contoh:
   $$f[x_0]=\frac{f^{(0)}(\xi)}{0!}=f(x_0)$$
   $$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f'(\xi) \qquad \xi\in[x_0,x_1]$$
   $$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{1}{2}f'(\xi) \qquad \xi\in X\{x_0,x_1,x_2\}$$
2. Jika $f(x)$ adalah polynomial derajad m, maka
   $$f[x_0,...,x_n,x]=\begin{cases}\text{polinomial derajad } m-n-1 & n<m-1\\ a_m & n=m-1\\ 0 & n>m-1\end{cases}$$
   dengan $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0$
3. Kesalahan dalam interpolasi
   $$f(x)-p_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_x)$$
   dengan $\xi_x\in \mathrm{H}\{x_0,....,x_n,x\}$
4. $\dfrac{d}{dx}f[x_0,...,x_n,x]=f[x_0,x,...,x_n,x,x]$

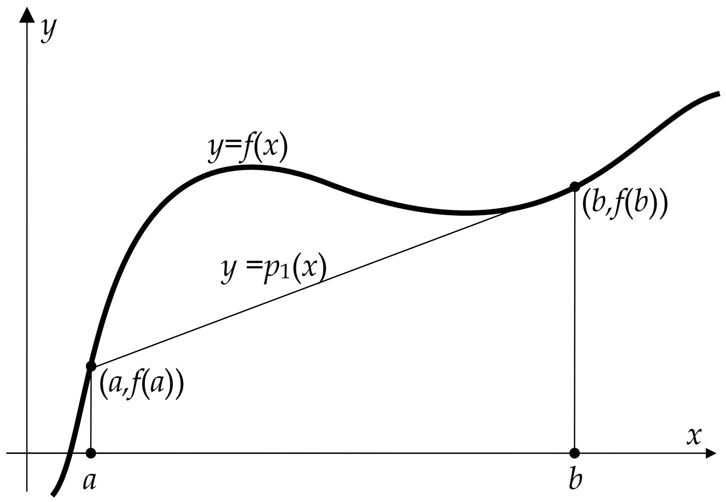
Bab
4. INTEGRASI NUMERIS

4.1. Rumus trapesium dan Simpson

Pada bab ini akan dibicarakan cara menghitung integral secara numeris dari

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

dimana $[a,b]$ berhingga



Gambar 8 Konsep integrasi trapesium

Rumus trapesium pada dasarnya adalah mendekati $f(x)$ dengan garis lurus yang melalui $(a,f(a))$ dan $(b,f(b))$

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) - f(b)\right]$$

Error:

$$f(x) - p_1(x) = f(x) - \left\{\frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right\}$$
$$= (x-a)(x-b)f[a,b,x]$$

ingat definisi 'beda terbagi $f[a,b,x]$.

Jadi 'error':

$$E_1(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$$
$$= \int_a^b (x-a)(x-b)f[a,b,x]dx$$

dengan harga tengah integral, didapat:

$$E_1(f) = f[a,b,\xi]\int_a^b (x-a)(x-b)dx \quad a \le \xi \le b$$
$$= \left(\frac{1}{2}f''(\eta)\right)\left(-\frac{1}{6}(b-a)^3\right) \quad \eta \in [a,b]$$
$$= -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$

Jika interval $[a,b]$ dibagi menjadi n pias sehingga untuk $n \geqslant 1$, $h = (b-a)/n$ dan $x_j = a + jh$, $j = 0,1,\ldots,n$, didapat:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{h}{2}\left[f(x_{j-1}) - f(x_j)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\eta_j) \right\}$$

dengan xj-1⩽nj⩽xj.

Sehingga integralnya dapat didekati dengan

$$I_n(f) = h\left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \ldots + f_{n=1} + \frac{1}{2}f_n\right] \qquad n \ge 1$$

Kesalahan $I_n(f)$ terhadap $I(f)$ adalah

$$E_n(f) = I(f) - E_n(f)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} -\frac{h^3}{12}f''(\eta_j)$$
$$= -\frac{h^3 n}{12}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\eta_j)\right]$$

Perlu diingat bahwa

$$\underset{a \le x \le b}{Min} f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\eta_j) \le \underset{a \le x \le b}{Max} f''(x)$$

karena $f''(x)$ menerus pada $a \leqslant x \leqslant b$, maka

$$E_n(f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\eta) \quad \eta \in [a,b]$$
$$= -\frac{h^2(b-a)}{12} f''(\eta)$$
$$= -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta$$

Estimasi kesalahan asimtotis $\tilde{E}_n(f)$

$$\underset{n\to\infty}{Limit} \frac{E_n(f)}{h^2} = \underset{n\to\infty}{Limit}\left[-\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\eta_j)h\right]$$
$$= -\frac{1}{12}\underset{n\to\infty}{Limit}\left[\sum_{j=1}^{n} f''(\eta_j)h\right]$$
$$= -\frac{1}{12}\int_a^b f''(x)dx$$

maka $\tilde{E}_n(f) \equiv -\frac{h^2}{12}\{f'(b) - f'(a)\}$

Definisi:

Jika $E_n(f)$ adalah kesalahan eksak, sedangkan $\tilde{E}_n(f)$ adalah estimasi darinya, maka $\tilde{E}_n(f)$ disebut estimasi kesalahan asimtotis dari $E_n(f)$ jika:

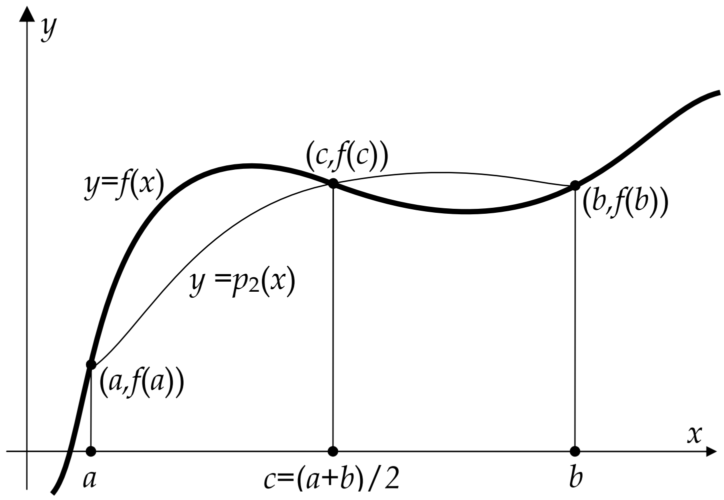
$$\underset{n\to\infty}{Limit} \frac{\tilde{E}_n(f)}{E_n(f)} = 1 \quad \text{atau} \quad \underset{n\to\infty}{Limit} \frac{E_n(f) - \tilde{E}_n(f)}{E_n(f)} = 0$$

4.1.1. Rumus trapesium terkoreksi

Dengan menggunakan $\tilde{E}_n(f)$, rumus trapesium dapat ditingkatkan menjadi:

$$CT_n(f) = I_n(f) + \tilde{E}_n(f)$$
$$= h\left[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + \ldots + f_{n=1} + \frac{1}{2}f_n\right] - \frac{h^2}{12}\{f'(b) - f'(a)\}$$

4.1.2. Rumus Simpson



Gambar 9 Konsep integrasi Simpson

Dalam metode Simpson fungsi $f(x)$ didekati dengan $p_2(x)$ yang melalui 3 titik $(a,f(a))$, $(c,f(c))$ dan $(b,f(b))$ dimana $c = (a+b)/2$.

$$I_2(f) = \int_a^b \left[\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) \right] dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(c) + f(b) \right] \text{ dengan } h = \frac{b-a}{2}$$

Kesalahannya:

$$E_2(f) = I(f) - I_2(f)$$

$$= \int_a^b (x-a)(x-b)(x-c) f[a,b,c,x] dx$$

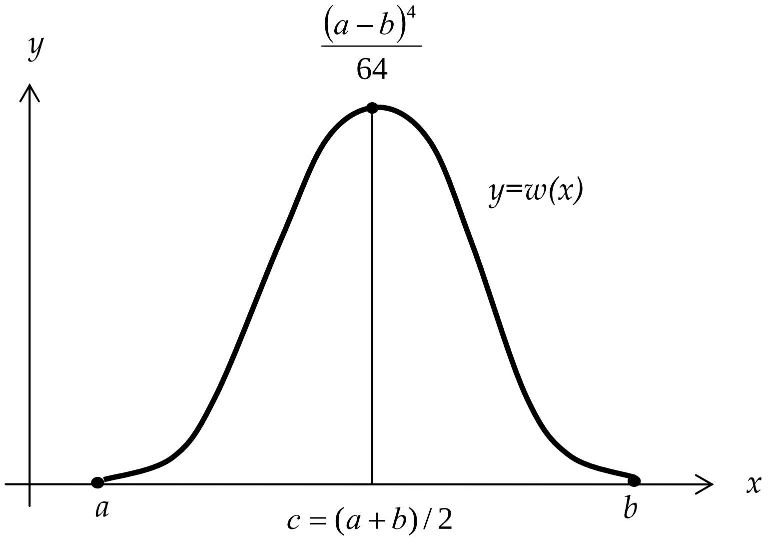
Harga tengah integral tidak dapat digunakan karena $(x\text{-}a)(x\text{-}c)(x\text{-}b)$ berganti tanda pada $x = c$.

Didefinisikan: $w(x) = \int_a^x (t-a)(t-c)(t-b)dt$

Beberapa fakta mengenai $w(x)$:

$$w(a) = w(b) = 0,\ w(c) = \frac{(a-b)^4}{64},\ w(x) > 0 \text{ untuk } a < x < b$$

$$w'(x) = (x-a)(x-c)(x-b)$$



Gambar 10 Fungsi $y = w(x)$ untuk metoda Simpson

Jadi $E_2(f)$ dapat ditulis sebagai:

$$E_2(f) = \int_a^b w'(x) f[a,b,c,x]dx$$

$$= w(x) f[a,b,c,x]]_a^b - \int_a^b w(x) \frac{d}{dx} f[a,b,c,x]$$

$$E_2(f) = -\int_a^b w(x) f[a,b,c,x,x]dx$$

$$= -f[a,b,c,\xi,\xi]\int_a^b w(x)dx \qquad \xi \in [a,b]$$

$$= -\frac{f^{(4)}(\eta)}{24}\left[\frac{4}{15}h^5\right]$$

$$= -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

Jika interval $[a,b]$ dibagi menjadi n pias, $n \geqslant 2$, $h = (b\text{-}a)/n$, $x_j = a + jh$ untuk $j = 1,2,3,\ldots,n$, sehingga

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)dx \qquad n = \text{genap}$$

$$= \sum_{j=1}^{n/2} \left\{ \frac{h}{3}\left[f_{2j-2} + 4f_{2j-1} + f_{2j}\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_j) \right\}$$

dengan $x_{2j-2} \leqslant n_j \leqslant x_{2j}$

Rumus Simpson:

$$I_n(f) = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

Kesalahan estimasi:

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = -\frac{h^5(n/2)}{90}\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\eta_j)$$

$$= -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a,b]$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\eta)$$

Estimasi kesalahan asimtotis: $\tilde{E}_n(f) = -\frac{h^4}{180}\left[f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)\right]$

4.2. Rumus Newton–Cotes

Rumus trapesium dan Simpson sebetulnya merupakan dua buah rumus pertama dari rumus Newton-Cotes.

Untuk $n \geqslant 1$, $h = (b-a)/n$, $x_j = a + jh$ untuk $j = 0,1,2,3,\ldots,n$. Didefinisikan $I_n(f)$ dengan mengganti $f(x)$ dengan polinomial $p_n(x)$ pada titik-titik $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \doteq \int_a^b p_n(x)dx$$

Dengan interpolasi Lagrange untuk $p_n(x)$, maka

$$I_n(f) = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} l_{j,n}(x) f(x_j) dx = \sum_{j=0}^{n} w_{j,n}(x) f(x_j)$$

dengan $w_{j,n} = \int_a^b l_{j,n}(x)dx \quad j = 0,1,\ldots,n$

Untuk nilai n = 1 dan 2 telah disajikan sebagai rumus trapesium dan Simpson. Sekarang untuk n = 3, contoh untuk menghitung w_0 adalah:

$$w_0 = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} dx$$

Jika $x = x_0 + \mu h$, $0 \leqslant \mu \leqslant 3$, maka:

$$w_0 = \int_{x_0}^{x_3} -\frac{1}{6h^3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx$$

$$= -\frac{1}{6h^3}\int_0^3 (\mu-1)h\,(\mu-2)h\,(\mu-3)h\,hd\mu$$

$$= -\frac{h}{6}\int_0^3 (\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)d\mu = \frac{3h}{8}$$

Jika w_1, w_2, w_3 dihitung dengan cara di atas, akhirnya akan didapat untuk n = 3

$$I_3(f) = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

Kesalahan pada $I_n(f)$ dinyatakan sebagai berikut:

a) Untuk n genap:

$$E_n(f) = C_n h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

dengan $C_n = \dfrac{1}{(n+2)!}\displaystyle\int_0^n \mu^2(\mu-1)...(\mu-n)d\mu$

b) Untuk n gasal:

$$E_n(f) = C_n h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

dengan $C_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\int_0^n \mu^2(\mu-1)...(\mu-n)d\mu$

4.2.1. Rumus Newton-Cotes Tertutup

n = 1, rumus trapesium

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b)\right] - \frac{h^3}{12}f''(\xi)$$

n = 2, rumus Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right] - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

n = 3

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\left[f(a) + 3f(a+h) + 3f(b-h) + f(b)\right] - \frac{3h^5}{80}f^{(4)}(\xi)$$

n = 4, rumus Boole

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{45}\left[7f(a) + 32f(a+h) + 12f(\frac{a+b}{2}) + 32f(b-h) + 7f(b)\right] - \frac{8h^7}{945}f^{(6)}(\xi)$$

Definisi: Integrasi numerik $\tilde{I}(f)$ yang mendekatri $I(f)$ disebut mempunyai derajat ketepatan m jika: (a) $\tilde{I}(f) = I(f)$ untuk semua polinomial $f(x)$ derajat $\le m$, (b) $\tilde{I}(f) \ne I(f)$ untuk beberapa polinomial $f(x)$ derajat $m+1$

Contoh:

Pada rumus Newton-Cotes untuk n = 1, 3 dikatakan mempunyai derajat ketepatan m = 1, 3. Sedangkan untuk n = 2, 4 mempunyai derajat ketepatan m = n + 1 = 3, 5. Tampak bahwa rumus Newton–Cotes dengan n genap menghasilkan derajat ketepatan ekstra dibandingkan dengan n gasal.

4.2.2. Rumus Newton–Cotes terbuka

Ada rumus Newton–Cotes yang tidak menggunakan salah satu atau kedua titik di ujung interval. Contoh yang paling sederhana adalah rumus titik tengah:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta) \quad \eta \in [a,b]$$

Rumus kompositnya:

$$\int_a^b f(x)dx = I_n(f) + E_n(f)$$

$$I_n(f) = h[f(x_1) + \cdots + f(x_n)]$$

$$E_n(f) = \frac{h^2(b-a)}{24} f''(\eta) \quad \eta \in [a,b]$$

dengan $h = \frac{(b-a)}{n}$, $x_j = a + (j - \frac{1}{2})h$ sebagai titik tengah dari titik-titik $\left(a+(j-1)h, a+jh\right)$ untuk $j = 1,2,\ldots,n$.

Rumus Newton–Cotes yang sedemikian ini disebut dengan rumus terbuka, sedangkan rumus yang terdahulu disebut tertutup.

$n = 2$:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(\xi)$$

$n = 3$:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi)$$

$n = 4$:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{4h}{3}[2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi)$$

$n = 5$:

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx = \frac{5h}{24}[11f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + 11f(x_4)] + \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\xi)$$

dimana $h = \frac{x_n - x_0}{n}$, x_0 = batas bawah, x_n = batas atas.

4.3. Kuadratur Gaussian

Pada metoda integrasi sebelumnya, rumus integrasinya berdasarkan polinomial derajat rendah yang merupakan pendekatan $f(x)$ dengan jumlah pias semakin besar.

Kuadratur Gaussian, rumus integrasinya menggunakan polinomial yang derajatnya makin tinggi.

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n}) = I_n(f)$$

Sebagai ilustrasi:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

dengan $w(x) \equiv 1$ Faktor pemberat $\{w_j\}$ dan titik nodal $\{x_j\}$ dipilih sedemikian sehingga kesalahan

$$E_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

sama dengan nol untuk suatu polinomial $f(x)$ dengan derajat setinggi mungkin.

$$E_n(a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m) = a_0 E_n(1) + a_1 E_n(x) + \cdots + a_m E_n(x)$$

Jadi $E_n(f) = 0$ untuk setiap polinomial derajat $\leqslant m$, bila dan hanya bila

$$E_n(x^i) = 0 \quad i = 0,1,\ldots,m.$$

- Kasus 1. $n = 1$. Karena hanya 2 parameter, w_1 dan x_1 sehingga diperlukan 2 persamaan:

$$E_n(1) = 0 \qquad\qquad E_n(x) = 0$$

$$\int_{-1}^{1} 1dx - w_1 = 0 \rightarrow w_1 = 2 \qquad\qquad \int_{-1}^{1} xdx - w_1 x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

sehingga $\int_{-1}^{1} f(x)dx \doteq 2f(0)$

- Kasus 2. $n = 2$. Ada 4 parameter w_1, w_2, x_1, x_2, sehingga dibutuhkan 4 persamaan:

$$E_n(x^i) = \int_{-1}^{1} x^i dx - (w_1 x_1{}^i + w_2 x_2{}^i) = 0 \quad \text{untuk } i = 0,1,2,3$$

atau $w_1 + w_2 = 2 \qquad w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0$

$$w_1 x_1{}^2 + w_2 x_2{}^2 = \frac{2}{3} \qquad w_1 x_1{}^3 + w_2 x_2{}^3 = 0$$

menghasilkan rumus:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{1}{3}\sqrt{3}) + f(\frac{1}{3}\sqrt{3})$$

mempunyai derajat ketelitian 3. Bandingkan dengan rumus Simpson yang menggunakan tiga titik.

- Kasus 3. untuk n, Terdapat $2n$ parameter $\{w_1\}$ dan $\{x_1\}$ sehingga terdapat $2n$ persamaan:

$$E_n(x^i) = 0 \quad i = 0,1,\ldots,2n-1 \quad \text{atau}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j{}^i = \begin{cases} 0 & i = 1,3,\ldots,2n-1 \\ \dfrac{2}{i+1} & i = 0,2,\ldots,2n-2 \end{cases}$$

persamaan diatas merupakan sistem persamaan non-linier yang penyelesaiannya tidak selalu jelas. Oleh karena itu digunakan cara lain.

4.3.1. Kuadratur Gauss-Legendre

Untuk $w(x) \equiv 1$, rumus Gauss pada interval [-1,1] adalah:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

dengan titik x_j adalah akar dari polinomial Legendre derajat n dalam interval [-1,1]. Faktor pemberatnya adalah

$$w_i = \frac{-2}{(n+1)P_n{}'(x_i)P_{n+1}(x_i)} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

dan

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2} \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}$$

Tabel 1 Gauss–Legendre titik dan pembobot

n	x_1	w_1
2	±0.5773502692	1.0
3	±0.7745966692	0.5555555556
	0.0	0.8888888889
4	±0.8611363116	0.3478546451

n	x_1	w_1
	±0.3399810436	0.6521451549
5	±0.9061798459	0.2369268851
	±0.5384693101	0.4786286705
	0.0	0.5688888889
6	±0.9324695142	0.1712344924
	±0.6612093865	0.3607615730
	±0.2386191861	0.4679139346
7	±0.9491079123	0.1294849662
	±0.7415311856	0.2797053915
	±0.4058451514	0.3818300505
	0.0	0.4179591837
8	±0.9602898565	0.1012285363
	±0.7966664774	0.2223810345
	±0.5255324099	0.3137066459
	±0.1834346425	0.3626837834

Contoh:

- $n = 1$: $\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(\overbrace{0.5773502692}^{\frac{1}{3}\sqrt{3}}) + f(\overbrace{-0.5773502692}^{-\frac{1}{3}\sqrt{3}})$

  $n = 3$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \begin{aligned}&0.5555555556 f(0.7745966692) + \\ &0.5555555556 f(-0.7745966692) + \\ &0.8888888889 f(0)\end{aligned}$$

- Untuk integral pada interval umum [a,b], maka digunakan transformasi sebagai berikut:

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b+(b-a)x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} w_j f\left(\frac{a+b+(b-a)x_j}{2}\right)$$

- $\int_1^3 (x^3 + x^2 + x + 1)dx = 34\frac{2}{3}$, dihitung dengan kuadratur Gaussian menghasilkan:

$$\int_1^3 f(x)dx = \frac{3-1}{2}\left[1.0 \times f\left(\frac{1+3+(3-1)\frac{1}{3}\sqrt{3}}{2}\right) + 1.0 \times f\left(\frac{1+3+(3-1)\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)}{2}\right)\right]$$

$$= f(2+\frac{1}{3}\sqrt{3}) + f(2-\frac{1}{3}\sqrt{3}) = 34.66666667$$

D:\My Stuffs\Publikasi\Metoda Numerik\Metoda Numerik 2009.docx (909 Kb)

4.4. Polinomial Orthogonal

Kuadratur Gauss-Legendre menggunakan polinomial orthogonal Legendre. Ada banyak famili polinomial yang orthogonal. Secara umum suatu famili polinomial $g_k(x)$ disebut orthogonal terhadap fungsi pemberat $w(x)$, jika :

$$\int_a^b w(x) g_n(x) g_m(x) dx = 0 \quad n \neq m$$

$$\int_a^b w(x) \left[g_n(x) \right]^2 dx = c(n) \neq 0$$

Contoh : set {sin (kx)} dan {cos (kx)}

- Polinomial Legendre. $P_n(x)$ → orthogonal pada interval [-1,1] terhadap $w(x)$ = 1

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad n \neq m$$

$$\int_{-1}^{1} \left[P_n(x) \right]^2 dx = c(n) \neq 0$$

Beberapa $P_n(x)$:

$P_0(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$)

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

Rumus rekursiv:

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)$$

- Polinomial Laquerre. $L_n(x)$ → orthogonal pada interval [0,∞] terhadap $w(x) = e^{-x}$

$$\int_0^\infty L_n(x) L_m(x) dx = 0 \quad n \neq m$$

$$\int_0^\infty \left[L_n(x) \right]^2 dx = c(n) \neq 0$$

Beberapa $L_n(x)$:

$L_0(x) = 1$

$L_1(x) = -x+1$

$L_2(x) = x^2-4x+2$

$L_3(x) = -x^3+9x^2-18x+6$

Rumus rekursiv:

$$L_n(x) = (2n - x - 1)L_{n-1}(x) - (n-1)^2 L_{n-2}(x)$$

- Polinomial Chebysev. $T_n(x)$ → orthogonal pada interval [-1,1] terhadap $w(x) = 1/\sqrt{(1-x^2)}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \qquad n \neq m$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{[T_n(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = c(n) \neq 0$$

Beberapa $T_n(x)$:

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2-1$

$T_3(x) = 4x^3-3x$

Rumus rekursiv:

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

- Polinomial Hermite. $H_n(x)$ → orthogonal pada interval [-∞,∞] terhadap $w(x) = e^{-x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \qquad n \neq m$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = c(n) \neq 0$$

Beberapa $H_n(x)$:

$H_0(x) = 1$

$H_1(x) = 2x$

$H_2(x) = 4x^2-2$

$H_3(x) = 8x^3-12x$

Rumus rekursiv:

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$$

4.4.1. Kuadratur Gauss-Laquerre

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

Kuadratur ini dapat digunakan untuk menghitung:

$$\int_a^\infty e^{-t} f(t)dt = e^{-a}\int_0^\infty e^{-x} f(x+a)dx$$
$$= e^{-a}\sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j + a)$$

dengan w_j = faktor pemberat, x_j = akar dari polinomial Laqerre

Tabel 2. w_j dan x_j dari kuadratur Gauss-Laguerre

n	w_j	x_j
2	0.85355 33905	0.58578 64376
	0.14644 66094	3.41421 35623
3	0.71109 30099	0.41577 45567
	0.27851 77335	2.29428 03602
	0.01038 92565	6.28994 50829
4	0.60315 41043	0.32254 76896
	0.35741 86924	1.74576 11011
	0.03888 79085	4.53662 02969
	0.00053 92947	9.39507 09123
5	0.263560319718	0.521755610583
	1.413403059107	0.398666811083
	3.596425771041	0.0759424496817
	7.085810005859	0.00361175867992
	12.640800844276	2.33699723858E-05
6	0.222846604179	0.45896467395
	1.188932101673	0.417000830772
	2.992736326059	0.113373382074
	5.775143569105	0.0103991974531
	9.837467418383	0.000261017202815
	15.982873980602	8.9854790643E-07
10	0.13779347054	0.308441115765
	0.729454549503	0.401119929155
	1.80834290174	0.218068287612
	3.401433697855	0.0620874560987
	5.552496140064	0.00950151697518
	8.330152746764	0.000753008388588
	11.8437858379	0.000028259233496
	16.279257831378	4.24931398496E-07
	21.996585811981	1.83956482398E-09
	29.920697012274	9.91182721961E-13
14	0.093307812017	0.21823488594
	0.492691740302	0.342210177923
	1.215595412071)	0.263027577942
	2.269949526204)	0.126425818106

n	**w_j**	**x_j**
	3.667622721751	0.040206864921
	5.425336627414	0.00856387780361
	7.565916226613	0.00121243614721
	10.120228568019	0.000111674392344
	13.130282482176	6.45992676202E-06
	16.65440770833	2.2263169071E-07
	20.776478899449	4.22743038498E-09
	25.623894226729	3.92189726704E-11
	31.407519169754	1.45651526407E-13
	38.530683306486	1.48302705111E-16
	48.026085572686	1.60059490621E-20

4.4.2. Kuadratur Gauss-Chebysev

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

dengan $w_j = \dfrac{\pi}{n}$ dan $x_j = \cos(\dfrac{2j-1}{2n}\pi)$, j = 1, 2, ... , n

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{1-x^2}\, f\left(\frac{a+b+(b-a)x}{2}\right)\right]dx$$

$$= \frac{(b-a)\pi}{2n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{1-x_j^2}\, f\left(\frac{a+b+(b-a)x_j}{2}\right)$$

4.4.3. Kuadratur Gauss-Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

Tabel 3. w_j dan x_j dari kuadratur Gauss - Laguerre

n	**w_j**	**x_j**
2	0.88622 69255	± 0.70710 67811
3	0.29540 89752	± 1.22474 48714
	1.18163 59006	0.0
4	0.08131 28354	± 1.65068 01239
	0.80491 40900	± 0.52464 76233
5	0.01995 32421	± 2.02018 28705
	0.39361 93232	± 0.95857 24646
	0.94530 87205	0.0

Bab 5. SISTEM PERSAMAAN LINIER

5.1. Eliminasi Gauss

Eliminasi Gauss digunakan mencari akar sistem persamaan linier.

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0 \\
f_2(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, ..., x_n) &= 0
\end{aligned}
$$

Contoh: Ditinjau sistem persamaan:

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 9 \\
x_1 + 9x_2 - 6x_3 &= 1 \\
-3x_1 + 8x_2 + 5x_3 &= 6
\end{aligned}
$$

yang akarnya adalah $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, dan $x_3 = 2$

Persamaan diatas dalam bentuk matrik dapat ditulis sebagai berikut:

$$[B]\{x\}=\{u\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 1 & 9 & -6 \\ -3 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

Untuk menjelaskan eliminasi Gauss, maka dibentuk suatu matrik sebagai berikut:

$$[B \mid u \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Kita kalikan baris 1 dengan 1/2, tambahkan (-1 x baris 1 yang baru) kepada baris 2, dan tambahkan (3x baris 1 yang baru) kepada baris 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 25/2 & -8 & -7/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & 11 & 39/2 & 3/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Operasi diatas sama dengan pembentukan/pengubahan sistem persamaan asli menjadi

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{7}{2}x_2 + 2x_3 &= \frac{9}{2} \\ \frac{25}{2}x_2 - 8x_3 &= -\frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2}x_2 + 11x_3 &= \frac{39}{2} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa operasi di atas jika ditulis dalam bentuk matrik adalah

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Selanjutnya dilakukan operasi sebagai berikut: kalikan baris 2 dengan 2/25 dan tambahkan (5/2 x baris 2 yang baru) kepada baris 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -16/25 & -7/25 & -1/25 & 2/25 & 0 \\ 0 & 0 & 47/5 & 94/25 & 7/5 & 1/5 & 1 \end{array}\right]$$

Operasi terakhir mengubah sistem persamaan menjadi:

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{7}{2}x_2 + 2x_3 &= \frac{9}{2} \\ x_2 - \frac{16}{25}x_3 &= -\frac{7}{25} \\ \frac{47}{25}x_3 &= \frac{94}{5} \end{aligned}$$

Kalikan baris 3 dengan 5/47. Tambahkan ke baris 2: (16/25 x baris 3 yang baru). Tambahkan ke baris 1: (-2 x baris 3 yang baru)

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -7/2 & 0 & 1/2 & 19/24 & -2/47 & -10/47 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{array}\right]$$

Akhirnya tambahkan ke baris 1: (7/2 x baris 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 93/235 & 67/235 & 6/235 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{array}\right]$$

Jadi sistem persamaan menjadi $x_1 = 4$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ dan inverse matrik [B] adalah

$$\begin{bmatrix} 93/235 & 67/235 & 6/235 \\ 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{bmatrix}$$

Dari pengamatan: $\det B = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{25} \times \frac{5}{47}\right)^{-1} = 235$

Jadi kalau di 'resume'

$$[B \mid u \mid I]$$
$$\Downarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\Downarrow$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 93/235 & 67/235 & 6/235 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & 5/47 \end{array}\right]$$
$$[I \mid x \mid B^{-1}]$$

5.2. Eliminasi Gauss–Jordan

Pada eliminasi Gauss di atas secara garis besar terdiri dari beberapa langkah:

a. operasi normalisasi: elemen diagonal diubah menjadi bernilai 1

b. operasi reduksi: elemen non-diagonal diubah menjadi bernilai 0

Pada eleminasi Gauss – Jordan operasi a & b dikerjakan bersamaan.

Contoh: $2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9$

$x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1$

$-3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6$

$$[B \mid u \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 2 & -7 & 4 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Normalisasi baris 1 dengan membaginya dengan elemen 'pivot' = 2, kemudian:

a. baris 2 - baris 1 yang baru

b. baris 3 + 3x baris 1 yang baru

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -7/2 & 2 & 9/2 & \boxed{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 25/2 & -8 & -7/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & 11 & 39/2 & 3/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Normalisasi baris 2 dengan membaginya dengan elemen 'pivot' = 25/2, kemudian:

a. kurangi (-7/2 x baris 2 yang baru) dari baris 1

b. kurangi (-5/2 x baris 2 yang baru) dari baris 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & -6/25 & 88/25 & 9/25 & 7/5 & 0 \\ 0 & 1 & -16/25 & -7/25 & -1/25 & \boxed{2/25} & 0 \\ 0 & 0 & 47/5 & 94/25 & 7/5 & 1/5 & 1 \end{array}\right]$$

Normalisasi baris 3 dengan membaginya dengan elemen 'pivot' = 47/5, kemudian:

a. kurangi (-6/25 x baris 3 yang baru) dari baris 1

b. kurangi (-16/25 x baris 3 yang baru) dari baris 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 93/235 & 67/235 & 6/235 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 13/235 & 22/235 & 16/235 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7/47 & 1/47 & \boxed{5/47} \end{array}\right] = \left[I \mid x \mid B^{-1}\right]$$

$$\det B = \left(2 \times \frac{25}{2} \times \frac{47}{5}\right) = 235$$

5.3. Eliminasi Gauss–Jordan dengan 'pivot' maksimum

Jika matrik [B] mempunyai salah satu elemen yang mempunyai nilai kecil sekali dibandingkan elemen yang lain, maka cara'pivoting' yang sebelumnya dapat memberikan hasil yang tidak akurat. Oleh karena itu dipilih elemen 'pivot' yang mempunyai nilai terbesar.

Contoh: $-3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 6$

$2x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 9$

$x_1 + 9x_2 - 6x_3 = 1$

$$\left[B \mid u \mid I\right] = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -3 & 8 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \boxed{9} & -6 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Dipilih elemen $b_{32} = 9$ sebagai 'pivot'

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -3 & 8 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1/9 & 1 & -6/9 & 1/9 & 0 & 0 & 1/9 \end{array}\right]$$

selanjutnya direduksi sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -35/9 & 0 & \boxed{31/3} & 46/9 & 1 & 0 & -8/9 \\ 25/9 & 0 & -2/3 & 88/9 & 0 & 1 & 7/9 \\ 1/9 & 1 & -2/3 & 1/9 & 0 & 0 & 1/9 \end{array}\right] \qquad \text{(I)}$$

Operasi 2:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -35/93 & 0 & 1 & 46/93 & 3/31 & 0 & -8/9 \\ \boxed{235/93} & 0 & 0 & 940/93 & 2/31 & 1 & 67/93 \\ -13/93 & 1 & 0 & 41/93 & 2/31 & 0 & 5/93 \end{array}\right] \qquad \text{(II)}$$

Operasi 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & 0 & 1 & 2 & 5/47 & 7/47 & 1/47 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 6/235 & 93/235 & 67/235 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 16/235 & 13/235 & 22/235 \end{array}\right] \qquad \text{(III)}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} ?_1 & x & ?_2 \end{array}\right] \qquad \text{(IIIa)}$$

Dari hasil terakhir (III) terlihat bahwa akar persamaan $\{x\}$ dapat dislesaikan, tetapi bagaimana matrik $?_1$ & $?_2$.

Sebetulnya $[?_1]$ elemennya adalah elemen $[B]^{-1}$, hanya letaknya tidak betul sehingga perlu diatur untuk mendapatkan inverse $[B]$ yang sesungguhnya.

Ada butir yang sangat penting dari hasil diatas:

- Akar dari $[B]\{x\}=\{u\}$ dapat dicari tanpa menghitung $[B]^{-1}$.
- Hitungan inverse suatu matrik lebih baik dihindari karena mahal beayanya.

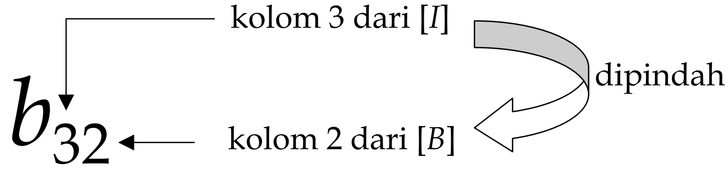
Untuk menghemat memori komputer, maka pada cara terakhir (eliminasi Gauss–Jordan dengan 'pivot' maksimum) hasil dari inverse dimasukan kedalam matrik $[B]$.

5.3.1. Rekonstruksi pembentukan "scrambled inverse"

♦ Pembentukan I
Yang Semula I

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -35/9 & 0 & 31/3 & 46/9 & 1 & 0 & -8/9 \\ 25/9 & 0 & -2/3 & 88/9 & 0 & 1 & 7/9 \\ 1/9 & 1 & -2/3 & 1/9 & 0 & 0 & 1/9 \end{array}\right]$$

dipindah



Gambar 11 Cara pertama pemindahan kolom dengan elemen pivot

Yang Baru I

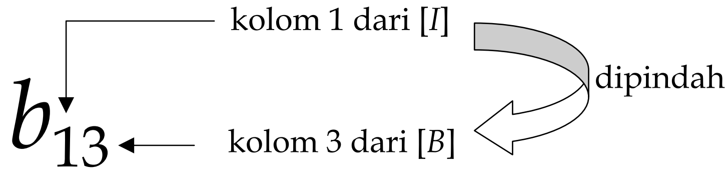
$$\begin{bmatrix} -35/9 & -8/9 & 31/3 & 46/9 \\ 25/9 & 7/9 & -2/3 & 88/9 \\ 1/9 & 1/9 & -2/3 & 1/9 \end{bmatrix}$$

- Pembentukan II

Yang Semula II

dipindah

$$\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -35/93 & 0 & 1 & 46/93 & 3/31 & 0 & -8/9 \\ 235/93 & 0 & 0 & 940/93 & 2/31 & 1 & 67/93 \\ -13/93 & 1 & 0 & 41/93 & 2/31 & 0 & 5/93 \end{array}\right]$$



Gambar 12 Cara kedua pemindahan kolom dengan elemen pivot

Yang Baru II

$$\begin{bmatrix} -35/93 & -8/9 & 3/31 & 46/93 \\ 235/93 & 67/93 & 2/31 & 940/93 \\ -13/93 & 5/93 & 2/31 & 41/93 \end{bmatrix}$$

- Pembentukan III

Yang Semula III

dipindah

$$
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc}
0 & 0 & 1 & 2 & 5/47 & 7/47 & 1/47 \\
1 & 0 & 0 & 4 & 6/235 & 93/235 & 67/235 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 16/235 & 13/235 & 22/235
\end{array}\right]
$$

kolom 2 dari $[I]$

dipindah

b_{21} ← kolom 1 dari $[B]$

Gambar 13 Cara kedua pemindahan kolom dengan elemen pivot

Yang Baru III

$$
\left[\begin{array}{cccc}
7/47 & 1/47 & 5/47 & 2 \\
93/235 & 67/235 & 6/235 & 4 \\
13/235 & 22/235 & 16/235 & 1
\end{array}\right]
$$

"**scrambled inverse**" ⇓ perlu diatur dahulu untuk menghasilkan inverse yang sesungguhnya

$\{x\} \rightarrow$ akar dari sistem persamaan

5.4. Metoda Iterasi

5.4.1. Metoda Jacobi

Kita bahas sistem persamaan: $[B]\{x\} = \{u\}$ atau

$$
\begin{aligned}
b_{11}x_{11} + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n &= u_1 \\
b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n &= u_2 \\
\vdots \qquad \vdots & \\
b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n &= u_n
\end{aligned}
\qquad \text{(A)}
$$

Metoda Jacobi membentuk persamaan untuk mendekati persamaan di atas:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{u_1 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - \ldots - b_{1n}x_n}{b_{11}} \\
x_2 &= \frac{u_2 - b_{21}x_1 - b_{23}x_3 - \ldots - b_{2n}x_n}{b_{22}}
\end{aligned}
\qquad \text{(B)}
$$

$$x_n = \frac{u_n - b_{n1}x_1 - b_{n2}x_2 - \ldots - b_{n,n-1}x_{n-1}}{b_{nn}}$$

atau $$x_i = \frac{u_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} b_{ij}x_j}{b_{ii}}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

jika terjadi $b_{ii} = 0$ atau nilainya kecil, maka harus diadakan pengaturan sehingga $b_{ii} \neq 0$

Metoda ini dimulai dengan "tebakan" nilai awal $\{x_0\}$ kemudian dimasukkan kedalam persamaan (B) untuk menghitung $\{x\}$ baru.

Contoh:

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ -x_1 + 2x_2 \quad &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 16 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \{x\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Persamaan di atas ditulis lagi:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{11}{4} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 \\ x_2 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 \\ x_3 &= 4 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \end{aligned} \qquad \text{(C)}$$

Vektor awal $\{x_0\} = [1, 1, 1]^t$

$$x_{11} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}\times 1 - \frac{1}{4}\times 1 = 2$$

$$x_{21} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\times 1 = 2$$

$$x_{31} = 4 - \frac{1}{2}\times 1 - \frac{1}{4}\times 1 = \frac{13}{4}$$

Jadi , $\{x_1\} = [2, \quad 2, \quad \frac{13}{4}]^t$

$$\{x_2\} = [0.9375 \quad 2.5 \quad 2.5]^t$$

$$\{x_3\} = [0.875 \quad 1.96875 \quad 2.90625]^t$$

$$\{x_4\} = [1.03906 \quad 1.9375 \quad 3.0703]^t$$

$$\{x_5\} = [1.01367 \quad 2.0195 \quad 2.9961]^t$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\{x_{14}\} = [1.0000 \quad 2.0000 \quad 3.0000]^t$$

Dalam metoda ini hitungan elemen vektor yang baru menggunakan elemen vektor yang lama.

5.4.2. Metoda Gauss-Seidel

Dibandingkan dengan metoda Jacobi, metoda Gauss-Seidel menghitung elemen vektor baru dengan menggunakan elemen yang baru saja dihitung.

Contoh: digunakan sistem persamaan yang digunakan sebelumnya, jadi persamaan (C) dapat digunakan.

Vektor awal $\{x_0\} = [1, 1, 1]^t$

$$x_{11} = \frac{11}{4} - \frac{1}{2}\times 1 - \frac{1}{4}\times 1 = 2$$

$$x_{21} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\times 2 = \frac{5}{2}$$

$$x_{31} = 4 - \frac{1}{2}\times 2 - \frac{1}{4}\times\frac{5}{2} = \frac{19}{8}$$

Jadi, $\{x_1\} = \left[2,\quad \frac{5}{2},\quad \frac{19}{8}\right]^t$

$$\{x_2\} = [0.9063 \quad 1.9531 \quad 3.0586]^t$$

$$\{x_3\} = [1.0088 \quad 2.0044 \quad 2.9945]^t$$

$$\{x_4\} = [0.9992 \quad 1.9996 \quad 3.0005]^t$$

$$\{x_5\} = [1.0000 \quad 2.0000 \quad 3.0000]^t$$

Bab
6. MATRIK

6.1. Notasi dan Konsep-konsep Pendahuluan

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad m \times n$$

$$B = (b_{ij}) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad n \times p$$

$$C = (c_{ij}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{bmatrix} \quad n \times p$$

$$D = (d_{ij}) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1q} \\ & & & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pq} \end{bmatrix} \quad n \times q$$

Dengan notasi diatas, maka hal-hal dibawah ini berlaku:

1. $E = B + C$ adalah matriks *n* x *p* dengan $e_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$
   $B + C = C + B$

2. $F = AB$ adalah matriks m x p dengan $f_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$
   $A(B+C) = AB + AC$, $(B+C)D = BD + CD$
   Jika $AB = BA$ maka *A* & *B* disebut **'commute'**
   Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } C = (c_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

maka

$$B+C=\begin{bmatrix}0 & 5\\ -1 & 2\\ 2 & 7\end{bmatrix} \qquad (B+C)A=\begin{bmatrix}15 & 20 & 10\\ 5 & 6 & 5\\ 23 & 32 & 12\end{bmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 0 & 37\end{bmatrix}$$

3.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix} \text{ dan } B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

maka

$$A^2=AA=\begin{bmatrix}11 & 4 & 0\\ -2 & 5 & 0\\ 14 & 14 & 7\end{bmatrix} \qquad AB=\begin{bmatrix}-4 & 5 & 11\\ 1 & 1 & 4\\ 11 & 7 & 18\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}16 & 9 & 7\\ 7 & -7 & 0\\ 13 & 11 & 6\end{bmatrix} \qquad B^2=\begin{bmatrix}10 & 6 & 14\\ -3 & 0 & -3\\ 9 & 6 & 15\end{bmatrix}$$

$$(A-B)(A+B)=\begin{bmatrix}-19 & -6 & -10\\ -5 & 13 & 7\\ 3 & 4 & 4\end{bmatrix} \text{dan } A^2-B^2=\begin{bmatrix}1 & -2 & -14\\ 1 & 5 & 3\\ 5 & 8 & -8\end{bmatrix}$$

tampak ternyata bahwa $(A\text{-}B)(A+B) \neq (A^2\text{-}B^2)$,
ternyata $(A\text{-}B)(A+B) = A^2\text{-}BA+AB\text{-}B^2$)

4. $A^t = A$ tranpos $\rightarrow G = A^t$, $g_{ij} = a_{ji}$
   $(B + C)^t = B^t + C^t$, $(ABD)^t = D^tB^tA^t$

   Jika $A = A^t$ maka A adalah simetris

$$\text{Contoh: } A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad A^t=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

H adalah matrik diagonal *jhj*, H adalah n x n dan $h_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.
Jika h_{ii} ditulis sebagai h_i, matrik diagonal H sering ditulis [$h_1, h_2, \ldots, h_n$]
Perhatikan: AH adalah matrik mxn $\rightarrow (h_j a_{ij})$
HB adalah matrik nxp $\rightarrow (h_j b_{ij})$
H adalah matrik skalar *jhj* elemennya h_{ii} mempunyai nilai sama yaitu h.

$$hA = Ah = AH, \quad hB = Bh = HB$$

Jika h =1, maka H disebut matrik identitas dan biasanya ditulis sebagai I

$$IA = AI = A$$

Contoh: $H = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{nn} \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

5. Jika $AK = I$, maka K adalah unik dan disebut invers dari A yang biasa ditulis sebagai A^{-1}. Matrik A disebut non-singuler *jhj* A^{-1} ada
6. Determinan

   Jika terdapat suatu matrik, A, nxn, maka dapat dihitung determinan A yang diberi notasi det [A], det A, atau |A|.

Beberapa sifat determinan:

$$\det(A^t) = \det(A),\ \det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Untuk menghitung determinan dibutuhkan beberapa definisi:

1. Minor dari a_{ij} adalah determinan dari suatu (n-1) x (n-1) matrik yang dibentuk dari matrik A, nxn, dimana baris dan kolom yang berisi a_{ij} dibuang
2. Kofaktor dari a_{ij} adalah suatu bilangan hasil perkalian antara $(-1)^{i+j}$ dikalikan dengan minor dari a_{ij} , dan diberi notasi A_{ij}

Determinan A dapat dihitung sebagai:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{rj} A_{rj} = \sum_{i=1}^{n} a_{is} A_{is}$$

Contoh:

$$\det\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix} = \overset{a_{11}}{1} \times \overset{\text{kofaktor } a_{11}}{5} + \underset{a_{12}}{4}\underset{\text{kofaktor } a_{12}}{(-2)} = -3$$

atau

$$= \underset{a_{22}}{5} \text{ x } \underset{\text{kofaktor } a_{22}}{1} + 4\ (-2) = -3$$

$$\det\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & -3 & 4\end{bmatrix} = 5 \times \overbrace{(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix}}^{\text{kofaktor } a_{11}} + 3 \times \overbrace{(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}}^{\text{kofaktor } a_{12}} + (-1) \times \overbrace{(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}}^{\text{kofaktor } a_{13}}$$

$$= 5 \times (+1) \times (-4+6) + 3 \times (-1) \times (4-4) - 1 \times (+1) \times (-3+2) = 11$$

7. Vektor adalah matrik dengan kolom tunggal

Contoh:

$$u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} \quad v = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}$$

$$'inner\ product'(dotproduct) : (u, v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u^t v = v^t u$$

Beberapa sifat: $(u, v+w) = (u,v)+(u,w)$
$(u+v, w) = (u,w)+(v,w)$
$(\alpha u,v) = \alpha(u,w)+(v,w)$
$(\alpha u,v) = \alpha(u,v)$ α skalar
$(u, u) \geq 0$, $(u,u) = 0$ *jhj* $\{u\} = 0$

6.2. Determinan dan invers

Secara numeris determinan dan invers dapat diselesaikan dengan metode Gauss beserta variannya yang sudah dijelaskan pada Bab 5.

Jika matrik A adalah nxn, maka pernyataan-pernyataan dibawah ini adalah equivalen:

1. $[A]\{x\} = \{B\}$ mempunyai penyelesaian yang unik
2. $[A]\{x\} = 0$ berarti $\{x\} = 0$
3. $[A]^{-1}$ ada
4. $\det(A) \neq 0$

6.2.1. Menghitung determinan dengan eleminasi segitiga atas

Dengan metode kofaktor dihitung determinan suatu matrix A, nxn, dengan ekspansi terhadap kolom pertama.

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}$$

Jika Adalah matrik segitiga atas, maka $a_{i1} = 0$, $i = 2,3,\ldots,n$

$$\therefore \det A = a_{11}A_{11} = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$$

Jika A matrik tidak segitiga, maka

$$\det A = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = K\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ -6 & 1 & 9 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -3B_1 + B_2 \\ -B_1 + B_3 \\ 6B_1 + B_4 \end{matrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -17 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 21 & 1 \end{vmatrix} B_2/(-17)$$

$$|A| = -17\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 21 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 4B_2 + B_3 \\ -25B_2 + B_4 \end{matrix}$$

$$|A| = -17\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & 0 & 2 & 86/17 \\ 0 & 0 & 21 & 117/17 \end{vmatrix} \frac{1}{2}B_3$$

$$|A| = (2)(-17)\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & 0 & 1 & 43/17 \\ 0 & 0 & 21 & 117/17 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -21B_3 + B_4 \end{matrix}$$

$$|A| = -34\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4/17 \\ 0 & 0 & 1 & 43/17 \\ 0 & 0 & 0 & -786/17 \end{vmatrix} = (-34)(1)(1)(1)(-786/17) = 1572$$

6.3. Matrik dan Vektor Eigen

Pada setiap matrik *A*, *nxn*, terdapat satu set vektor yang disebut vektor eigen dan satu set skalar yang disebut nilai eigen.

Vektor u disebut eigen dari matrik *A jhj u* vektor tidal nol dan λ adalah suatu skalar (yang mungkin nol nilainya), sehingga

$$[A]\,\{u\} = \lambda\{u\} \qquad \text{(I)}$$

Skalar λ disebut nilai eigen dari matrik A

Pers. (I) dapat ditulis sebagai:

$$[A-\lambda I]\{u\} = \{0\} \qquad \text{(II)}$$

Pers. (II) mempunyai penyelesaian dengan $\{u\}$ tidak nol, jika

$$\Phi(\lambda) \equiv \det\,(A-\lambda I) = 0$$

$\Phi(\lambda)$ disebut fungsi karakteristik dari matrik A.

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

Contoh: Menentukan vektor & nilai eigen matrik

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\phi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\{(3-\lambda)(2-\lambda)-1\} - (2-\lambda+0) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8$$

Akar dari $\Phi(\lambda)=0$ adalah nilai eigen $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=4$.

Vektor eigen untuk $\lambda_1=1$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -1 & 0 \\ -1 & 3-1 & -1 \\ 0 & -1 & 2-1 \end{bmatrix}\{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dengan eliminasi Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] B_1+B_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} B_2+B_1 \\ \\ B_2+B_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ini berarti terdapat 2 persamaan linier untuk 3 bilangan tak diketahui: $\left.\begin{array}{l} u_1 - u_3 = 0 \\ u_2 - u_3 = 0 \end{array}\right\} u_1 = u_2 = u_3$

Jadi vektor eigen untuk λ_1=1 adalah: $\{u\}_1 = u_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Vektor eigen untuk λ_2=2

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ tampak bahwa baris 1 & 3 identik, sehingga sehingga hanya terdapat 2 persamaan:

$$\left.\begin{aligned} -u_2 &= 0 \\ u_1 + u_2 - u_3 &= 0 \end{aligned}\right\} u_1 = -u_3,\, u_2 = 0$$

Vektor eigen untuk λ_3=4

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \underset{\text{Jordan}}{\overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \{u\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 - u_3 &= 0 \\ u_2 + 2u_3 &= 0 \end{aligned}\right\} u_1 = u_3,\, u_2 = -2u_3 \Rightarrow \{u\}_3 = u_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

6.3.1. Metode 'power' untuk mendapatkan nilai & vektor eigen terbesar.

Langkah-langkah:

1. Rumuskan fenomena fisik ke bentuk $[A]\{u\}=\lambda\{u\}$
2. Prakirakan vektor awal $\{u\}_0 \neq \{0\}$
3. Hitung vektor baru $\{u\}_1=[A]\{u\}_0$
4. Faktorkan koefisien terbesar $\{u\}_1'=\lambda_1\{u\}_1$
5. Kembali ke langkah 3 dengan $\{u\}_0=\{u\}_1'$ sampai $\{u\}_1 \approx \{u\}_0$

Contoh: Tentukan nilai & vektor eigen dari matrik

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 5 \\ 6 & 30 & 9 \\ 5 & 9 & 30 \end{bmatrix}$$

Vektor awal: $\{u\}_0^t = \{0, 0, 1\}$

$$[A]\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_0 = \begin{Bmatrix} 5 \\ 9 \\ 30 \end{Bmatrix}_1 = 30 \begin{Bmatrix} 0.166 \\ 0.300 \\ 1.000 \end{Bmatrix}_1$$

$$[A]\begin{Bmatrix}0.166\\0.300\\1.000\end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix}11.780\\18.996\\33.530\end{Bmatrix}_2 = 33.530\begin{Bmatrix}0.351\\0.566\\1.000\end{Bmatrix}_2$$

$$[A]\begin{Bmatrix}0.351\\0.566\\1.000\end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix}18.926\\29.886\\36.849\end{Bmatrix}_3 = 36.849\begin{Bmatrix}0.514\\0.811\\1.000\end{Bmatrix}_3$$

$$[A]\begin{Bmatrix}0.514\\0.811\\1.000\end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix}25.286\\36.414\\39.869\end{Bmatrix}_4 = 39.869\begin{Bmatrix}0.634\\0.913\\1.000\end{Bmatrix}_4$$

dst … akhirnya didapat

$$\lambda_1 = 43{,}49 \text{ dan } \{u\}_1 = \begin{Bmatrix}0.800\\1.000\\0.965\end{Bmatrix}$$

Contoh aplikasi: Suatu elemen berbentuk piramida dalam suatu benda yang dikenai gaya-gaya luar. Gaya normal dan geser yang sejajar sumbu-sumbu koordinat telah diketahui, maka diinginkan bidang patahan yang mungkin terjadi dan besarnya gaya normal yang bekerja pada bidang itu.

Kesetimbangan gaya-gaya dalam Gambar 14 sebagai berikut:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}dydz\sigma_x + \frac{1}{2}dxdz\tau_{yx} + \frac{1}{2}dxdy\tau_{zx} + R_x = 0$$

$$\ell dA\sigma_x + mdA\tau_{yx} + ndA\tau_{zx} + \ell dA\sigma = 0$$

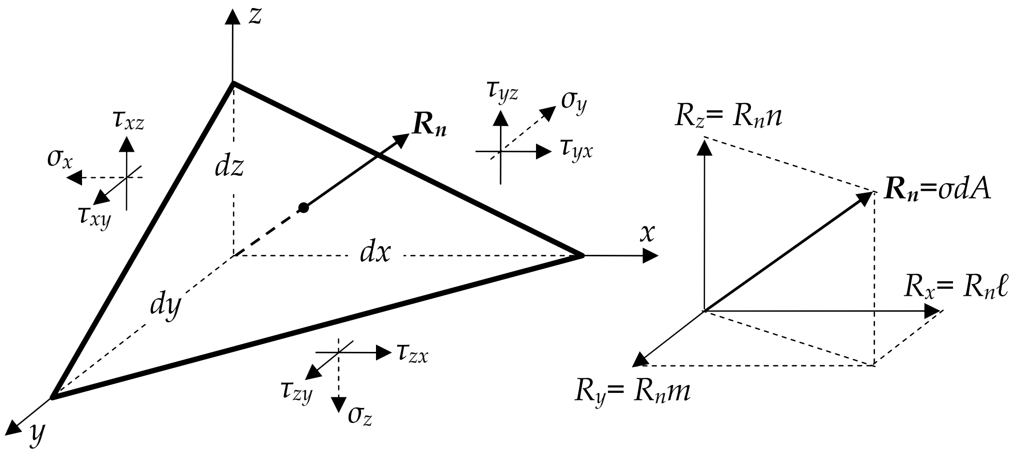
$$\ell\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = -\sigma\ell$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}dydx\tau_{xy} + \frac{1}{2}dxdz\sigma_y + \frac{1}{2}dxdy\tau_{zy} + R_y = 0$$

$$\ell\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} = -\sigma m$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}dydz\tau_{xz} + \frac{1}{2}dxdz\tau_{yz} + \frac{1}{2}dxdy\sigma_z + R_z = 0$$

$$\ell\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z = -\sigma n$$



luas bidang miring = dA
$\frac{1}{2}dydz = dA\cos(N,x) = \ell dA$
$\frac{1}{2}dxdz = dA\cos(N,y) = mdA$
$\frac{1}{2}dxdy = dA\cos(N,z) = ndA$

Gambar 14 Gaya-gaya yang bekerja pada struktur

Sekarang dalam bentuk matrik:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{yz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix} = -\sigma \begin{Bmatrix} \ell \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

atau $[A]\{u\} = \lambda\{u\}$ ← problem nilai dan vektor eigen, dengan:

- $[A]$ matrik yang elemennya terdiri dari gaya geser & normal sejajar sumbu koordinat ← diketahui.
- $\{u\}$ vektor yang elemennya terdiri atas cosinus sudut bidang patahan dengan sumbu kordinat ← dicari.
- λ skalar yang merupakan/menyatakan gaya normal/tegangan normal yang bekerja pada bidang patahan ← dicari.

Bab
7. PERSAMAAN DIFFERENSIAL BIASA

Dalam bidang teknik sering dijumpai persamaan suatu fenomena alam yang dinyatakan dalam persamaan diferensial biasa (PDB)
Contoh:

- Problem nilai awal: $y' = f(x,y)$ dengan $y(x_0) = Y_0$
- Problem nilai batas: $y'' = g(x,y,y')$ dimana $a<x<b$

$$A\begin{bmatrix} u(a) \\ u'(a) \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} u(b) \\ u'(b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

dengan ***A*** & ***B*** adalah matrik 2x2 dan γ_1 & γ_2 konstanta yg telah diketahui.

Taylor series

Taylor mengatakan bahwa suatu fungsi dengan sifat tertentu dapat dinyatakan sebagai

$$f(x) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \ldots$$

atau

$$y(x) = y_0 + \frac{h}{1!}y'_0 + \frac{h^2}{2!}y''_0 + \ldots + \frac{h^n}{n!}y_0^{(n)} + \ldots \qquad h + x - x_0$$

Deret ini akan digunakan dalam bab ini

Contoh: $y' - \frac{1}{2}y = 0, \quad y(0) = 1$

Secara analitis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y \rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \frac{1}{2}\int dx$$

Jadi $1n\ y = \frac{1}{2}x = c \rightarrow y = e^{x/2} + c$

Jika $y(0) = 1 \rightarrow 1 = e^{0/2} + c \rightarrow c = 0$

Maka secara analitis $y = e^{x/2}$

Dengan deret Taylor dapat diselesaikan sbb:

Pers. Asli

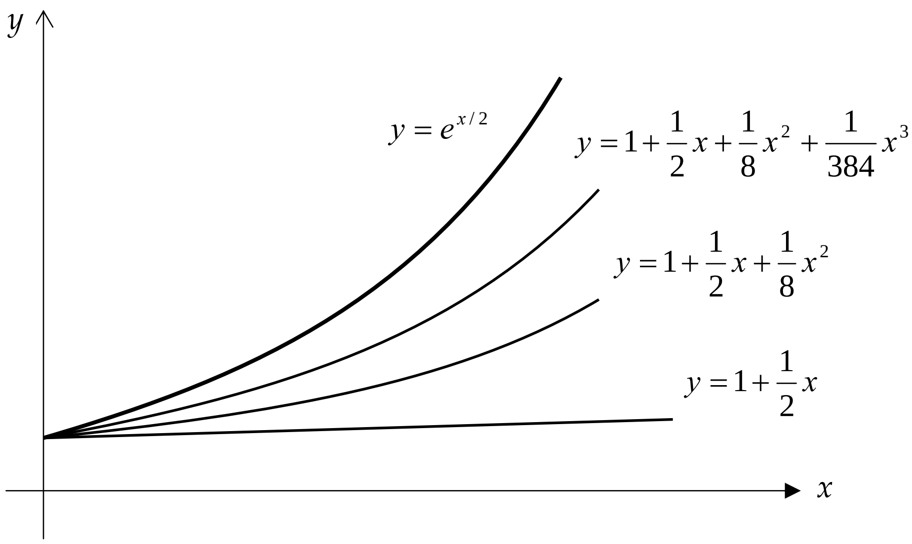
$$y' = \frac{1}{2}y \qquad y(0) = 1 \qquad x_0 = 0$$

$$y'' = \frac{1}{2}y' \qquad y'(0) = \frac{1}{2}$$

$$y''' = \frac{1}{2}y'' \qquad y''(0) = \frac{1}{4}$$

$$y'''' = \frac{1}{2}y''' \qquad y'''(0) = \frac{1}{8}$$

Jadi $y(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4 + \ldots$



Gambar 15 Penyelesaian dengan Metoda Euler

Cara numeris untuk menyelesaikan problem nilai awal adalah diferensial hingga. Pada metoda diferensi hingga penyelesaian pendekatan didapat pada titik-titik hitung

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots \ < x_n < \ \ldots$$

dan nilai pendekatan pada setiap x_n diperoleh dengan menggunakan nilai-nilai yg didapat sebelumnya.

Ditinjau PDB: $y' = f(x, y),\ y(x_0) = Y_0$

Penyelesaian sesungguhnya ditulis $Y(x)$, sehingga pers. diatas menjadi:

$$Y'(x) = f(x, Y(x)),\ Y(x_0) = Y_0$$

Penyelesaian pendekatannya ditulis $y(x)$ dan nilai $y(x_0)$, $y(x_1)$, …, $y(x_n)$, … atau ditulis sebagai y_0, y_1, …, y_n, … sebuah pias $h \rangle 0$ digunakan untuk mendefinisikan titik-titik hitung

$$x_j = x_0 + jh \qquad j = 0,1, ...$$

Jika akan diadakan perbandingan penyelesaian pendekatan untuk beberapa nilai h, maka $y_h(x)$ digunakan untuk menyatakan $y(x)$ dengan pias h.

7.1. Metoda Euler

Dengan deret Taylor hitung $Y(x_{n+1})$ dengan menggunakan $Y(x_n)$

$$Y(x_{n+1}) = Y(x_n) + h\,Y'(x_n) + \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n)$$

dengan $x_n \le \xi \le x_{n+1}$

Rumus Euler menjadi: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ $\qquad n = 0,1,2, ...$

dengan $y_0 = Y_0$

Kesalahan diskritisasi adalah

$$Y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n)$$

Contoh: PDB $y' = y,\ y_{(0)} = 1 \ \rightarrow Y(x) = e^x$

Rumus Euler uth $h = 0.2$

$$y_{n+1} = y_n + 0.2 y_n = 1.2 y_n$$
$$y_1 = 1.2 y_0 = 1.2 \times 1 = 1.2$$
$$y_2 = 1.2 y_1 = 1.2 \times 1.2 = 1.44$$

Jika ditabelkan:

h	***x***	***$y_h(x)$***	***$Y_h(x)$***	***$Y_h(x)$- $y_h(x)$***
0.2	0.4	1.44000	1.49182	0.05182
	0.8	2.07360	2.22554	0.15194
	1.2	2.98598	3.32012	0.33414
	1.6	4.29982	4.95303	0.65321
	2.0	6.19174	7.38906	1.19732
0.1	0.4	1.46410	1.49182	0.02772
	0.8	2.14356	2.22554	0.08198
	1.2	3.13843	3.32012	0.18169

h	x	$y_h(x)$	$Y_h(x)$	$Y_h(x)$- $y_h(x)$
	1.6	4.59497	4.95303	0.35806
	2.0	6.72750	7.38906	0.66156

Perhatikan bahwa kesalahan menurun ½ dari nilai pertama karena h dikecilkan ½ kali

7.2. Metoda 'Multi–Step'

Secara umum rumus langkah majemuk dapat ditulis sebagai:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h\sum_{j=-1}^{p} b_j f\left(x_{n-j}, y_{n-j}\right) \qquad n \geq p$$

Koefisien $a_0, ..., a_p, b_{-1}, b_0, ..., b_p$ adalah suatu konstanta, dan $p \geq 0$

Jika $a_p \neq 0$ dan $b_p \neq 0$, metoda ini disebut metoda langkah (p+1), karena (p+1) nilai pendekatan sebelumnya digunakan untuk menghitung y_{n+1}. Nilai $y_1, ..., y_p$ harus dihitung dengan cara lain.
Metoda Euler adalah metoda langkah tunggal karena p = 0, dan $a_0 = 1$, $b_{-1} = 0$, $b_0 = 1$.
Jika $b_{-1} = 0$ maka $Y_{(x_{n+1})}$ hanya terdapat pada ruas kiri, sehingga rumusnya disebut rumus eksplisit.
Jika $b_{-1} \neq 0$, maka $Y_{(x_{n+1})}$ terdapat diruas kanan maupun kiri, sehingga disebut rumus implisit.

Koefisien a_j dan b_j dapat dihitung dari

$$\sum_{j=0}^{p} a_j = 1 - \sum_{j=0}^{p} j a_j + \sum_{j=-1}^{p} b_j = 1$$

$$\sum_{j=0}^{p} (-j)^i a_j + i\sum_{j=-1}^{p} (-j)^{i-1} b_j = 1 \qquad i = 2, ..., m$$

Rumus terakhir menjamin bahwa $Y(x)$ dapat diderivikasikan $(m+1)$ kali.
Jika $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $b_{-1} = 0$, $b_0 = 2$, maka didapat rumus untuk metoda titik tengah

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf\left(x_n, y_n\right) \qquad n \geq 1$$

Merupakan metoda langkah ganda yang explisit.

Jika $a_0 = 1$, $b_{-1} = b_0 = \frac{1}{2}$, maka didapat rumus trapesium yang implisit dan merupakan metoda langkah tunggal:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right],\ n \geq 0$$

7.2.1. Metoda Trapesium

Metoda ini dapat pula dijabarkan dari:

$$Y'(t) = f(t, Y(t))$$

Diintegrasikan dari $[x_n, x_{n+1}]$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} Y'(t)dt = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, Y(t))dt$$

$$Y(x_{n+1}) - Y(x_n) = \frac{1}{2}h\left[f(x_n, Y(x_n)) + f(x_{n+1}, Y(x_{n+1}))\right] - \frac{h^3}{12}Y'''(\xi_n) \quad x_n \leq \xi_n \leq x_{n+1}$$

sehingga pendekatannya menjadi

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h\left[f(x_n, Y(x_n)) + f(x_{n+1}, Y(x_{n+1}))\right]$$

Karena rumusnya implisit, maka y_{n+1} dapat dihitung dengan iterasi, jadi secara umum:

$$y_{n+1}^{(j+1)} = y_n + \frac{1}{2}h\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(j)}\right)\right] \qquad j=0, 1, \ldots$$

Langkah-langkah hitungan:

1. x_n, y_n telah diketahui/dihitung pada langkah sebelumnya
2. $y_{n+1}^{(0)}$ diprakirakan dgn rumus eksplisit, misalkan
   $y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$
3. $y_{n+1}^{(0)}$ dimasukkan kedalam ruas kanan sehingga $y_{n+1}^{(1)}$ dapat dihitung
4. langkah 2 diulang s/d ketelitian yang dikehendaki

Walaupun secara umum dapat diselesaikan dengan iterasi, tetapi mungkin dapat diselesaikan dengan cara lain atau bahkan tanpa iterasi tergantung dari $f(x,y)$.

Contoh: $y' = y$ $\quad y(0) = 1$

Karena $f(x,y) = y$, maka $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(y_n + y_{n+1})$

$$y_{n+1} = \frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}} y_n$$

Untuk $h = 0.2 \rightarrow y_{n+1} = \frac{1.1}{0.9} y_n = 1.2222 y_n$

$y_1 = 1.2222\ y_0 = 1.2222 \times 1$

$y_2 = 1.2222\ y_1 = 1.2222 \times 1.2222 = 1.49383$

Jika ditabelkan:

x	$y_h(x)$	$Y_h(x)$	$Y_h(x)$- $y_h(x)$
0.4	1.49383	1.49182	-0.00200
0.8	2.23152	2.22554	-0.00598
1.2	3.33350	3.32012	-0.01339
1.6	4.97968	4.95303	-0.02665
2.0	7.43878	7.38906	-0.04972

7.3. Metoda Runge-Kutta (RK)

Metoda Runge-Kutta merupakan metoda langkah tunggal yang lebih teliti dibandingkan metoda Euler.

Semua metoda RK dapat ditulis sebagai:

$$y_{i+1} = y_1 + h\Phi(x_i, y_i, h)$$

dengan $\Phi(x_i, y_i, h)$ disebut fungsi penambah

7.3.1. Metoda RK derajat dua

$$\Phi = ak_1 + bk_2$$

dengan $k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f(x_i + ph, qhf(x_i, y_i) + y_i)$$

$$= f(x_i + ph, qhk_1 + y_i)$$

dimana *a*,*b*,*p*,*q* akan ditentukan kemudian.

Ditinjau deret Taylor untuk 2 variabel (*x*,*y*):

$$f(x+r, y+s) = f(x,y) + rf_x(x,y) + sf_x(x,y) + \frac{1}{2}r^2 f_{xx}(x,y) +$$

$$rsf_{xy}(x,y) + \frac{1}{2}s^2 f_{yy}(x,y) + O\left[(|r|+|s|)^3\right]$$

$$\therefore k_2 = f(x_i,y_i) + phf_x(x_i,y_i) + k_1 qhf_y(x_i,y_i) + O(h^2)$$

Jadi

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i,y_i,h)$$

$$= y_i + h[af(x_i,y_i) + bf(x_i,y_i)] + h^2[pbf_x(x_i,y_i) + bqf(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)] \quad \text{(A)}$$

Dengan deret Taylor:

$$y_{i+1} = y_i + hy'(x_i,y_i) + \frac{h^2}{2!}y'_x(x_i,y_i) + \ldots$$

$$= y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2}[y''_i + y'_y y'] \quad \text{(B)}$$

$$= y_i + hf(x_i,y_i) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_i,y_i) + f(x_i,y_i)f_y(x_i,y_i)]$$

$$A = B \rightarrow a + b = 1,\ bp = \tfrac{1}{2},\ bq = \tfrac{1}{2}$$

Tidak dapat diselesaikan karena hanya ada 3 persamaan dengan 4 bilangan anu yaitu *a*,*b*,*p*,*q*. Biasanya nilai *b* adalah ½ atau 1.

- Untuk *b* = ½, *a* = ½, *p* =*q* = 1

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[\underbrace{f(x_i, y_i)}_{\text{slope di } x_i} + \underbrace{f\{x_i + h, y_i + \overbrace{hf(x_i, y_i)}^{\text{Euler utk } y_{i+1}}\}}_{\text{slope di } x_{i+1} \text{ dihitung dgn metoda Euler}}] \quad \text{(C)}$$

Jadi metoda RK dapat dipandang sebagai metoda 'predictor-corrector'

1. Langkah predictor:
   a. prakirakan $\bar{y}_{i+1}$ dengan metoda Euler
   b. slope (y') dititik $(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$ adalah $f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$
2. Langkah corrector:
   a. hitung slope (y') dititik (x_i, y_i) yaitu $f(x_i, y_i)$
   b. hitung slope rerata = (slope 1.b + slope 2.a)/2
   c. hitung $y_{i+1} = y_i + h$ x hasil 2.b

- Untuk *b* = 1, *a* = 0, *p* = *q* = ½

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hf(x_i + y_i))$$

7.3.2. Metoda RK berderajat tiga

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{6}h[k_1 + 4k_2 + k_3]$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h/2, y_i\ \tfrac{1}{2}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + 2hk_2 - hk_1)$$

D:\My Stuffs\Publikasi\Metoda Numerik\Metoda Numerik 2009.docx (909 Kb)

7.3.3. Metoda RK berderajat empat

7.3.3.1. Metoda Pertama

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \tfrac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)\\
k_1 &= f\left(x_i, y_i\right)\\
k_2 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hk_1\right)\\
k_3 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hk_2\right)\\
k_4 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}hk_3\right)
\end{aligned}
$$

7.3.3.2. Metoda Kedua

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \tfrac{h}{8}\left(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4\right)\\
k_1 &= f\left(x_i, y_i\right)\\
k_2 &= f\left(x_i + h/3, y_i + \tfrac{1}{3}hk_1\right)\\
k_3 &= f\left(x_i + \tfrac{2}{3}h, y_i - \tfrac{1}{3}hk_1 + hk_2\right)\\
k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + hk_1 - hk_2 + hk_3\right)
\end{aligned}
$$

7.3.3.3. Metoda Ketiga

Metoda inilah yang paling banyak digunakan

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \tfrac{1}{6}h\left[k_1 + \left(2-\sqrt{2}\right)k_2 + \left(2-\sqrt{2}\right)k_3 + k_4\right]\\
k_1 &= f\left(x_i, y_i\right)\\
k_2 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + hk_1\right)\\
k_3 &= f\left(x_i + \tfrac{1}{2}h, y_i + \tfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)hk_1 + 1\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_2\right)\\
k_4 &= f\left(x_i + h, y_i - \tfrac{1}{\sqrt{2}}hk_2 + \left(1+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_3\right)
\end{aligned}
$$

Contoh: $y' = \tfrac{1}{2}y$ $\quad y(0)=1$ ➔ eksak $Y(x) = e^{x/2}$

$Y(1) = e^{1/2} = 1.648721271$

Diselesaikan dengan RK4: $f(x,y) = \tfrac{1}{2}Y$

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\left(x_0, y_0\right) = f(0,1) = \tfrac{1}{2}\times 1 = \tfrac{1}{2}\\
k_2 &= f\left(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}hk_1\right) = f\left(0 + \tfrac{1}{2}.1, 1 + \tfrac{1}{2}.1.\tfrac{1}{2}\right)\\
&= f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{4}\right) = \tfrac{1}{2}.\tfrac{5}{4} = \tfrac{5}{8}\\
k_3 &= f\left(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)hk_1 + \left(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)hk_2\right)\\
&= \tfrac{1}{2}\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)(1)\left(\tfrac{1}{2}\right) + \left(1-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)(1)\left(5/8\right)\right] = 0.64331
\end{aligned}
$$

$$k_4 = f\left(x_0 + h, y_0 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} hk_2 + \left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) hk_3\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1)\left(\tfrac{5}{8}\right) + \left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)(1)(0.64331)\right] = 0.828125$$
$$y(1) = y(0) + \tfrac{1}{6}\left[\tfrac{1}{2} + \left(2 + \sqrt{2}\right)(0.64431) + 0.828125\right] = 1.6484375$$

7.4. Metoda 'Predictor-Corrector'

Metoda langkah majemuk berdasarkan rumus integrasi. Secara umum metoda ini mengintegrasi PDB pada interval $[x_{i-k}, x_{i+1}]$ sebagai berikut:

$$y' = f(x, y)$$
$$\int_{y_{i-k}}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx$$
$$y_{i+1} = y_{i-k} + \int_{x_{i-k}}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx$$

$f(x, y)$ didekati polinomial derajat r, $\Phi(x) = \sum_{j=0}^{r} a_j x^j$

Integrasi terbuka dan beda terbagi mundur menghasilkan:

- untuk $k = 0$, $r = 3$

  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}\right)$ $O(h^5)$
- untuk $k = 1$, $r = 1$

  $y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i$ $O(h^3)$
- untuk $k = 3$, $r = 3$

  $y_{i+1} = y_{i-3} + \frac{4}{3} h\left(2 f_i - f_{i-1} + 2 f_{1+2}\right)$ (I) $O(h^5)$
- untuk $k = 5$, $r = 5$

  $y_{i+1} = y_{i-5} + \frac{3}{10} h\left(11 f_i - 14 f_{i-1} + 26 f_{i-2} - 14 f_{i-3} + 11 f_{i-4}\right)$ $O(h^7)$

Integrasi tertutup dan beda terbagi mundur menjadi:

- untuk $k = 0$, $r = 3$

  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2}\right)$ $O(h^5)$
- untuk $k = 5$, $r = 5$

  $y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}\left(f_{i+1} + 4 f_i + f_{i-1}\right)$ (II) $O(h^5)$

- untuk k = 3, r = 5

$$y_{i+1} = y_{i-3} + \tfrac{2h}{45}\left(7f_{i+1} + 32f_1 + 12f_{i-2} + 7f_{i-3}\right) \qquad O(h^7)$$

Kesulitan metoda langkah majemuk adalah pada saat permulaan y_{i-k} belum terhitung sehingga harus harus dihitung dengan cara lain, misalnya metoda Euler.

Dari hasil di atas tampak bahwa integrasi terbuka memberikan rumus eksplisit; sehingga hitungan tidak menggunakan iterasi. Integrasi tertutup menghasilkan rumus implisit, sehingga membutuhkan iterasi.

Walaupun menggunakan iterasi, integrasi tertutup lebih disukai karena ketelitiannya lebih tinggi.

Contoh:

Pada (I) kesalahan: $\frac{14}{15} h^5 f^{(4)}(\xi) \qquad x_{i-3} \le \xi \le x_{i+1}$

(II) kesalahan: $-\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\bar{\xi}) \qquad x_{i-3} \le \bar{\xi} \le x_{i+1}$

- Rumus Adam–Bashforth (eksplisit)
  1. $Y_{n+1} = Y_n + hY'_n + \frac{1}{2}h^2 Y''(\xi_n)$
  2. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[3Y' - Y'_{n-1}\right] + \frac{5}{12}h^3 Y^{(3)}(\xi_n)$
  3. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{12}\left[23Y'_n - 16Y'_{n-1} + 5Y'_{n-2}\right] + \frac{3}{8}h^4 Y^{(4)}(\xi_n)$
  4. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{24}\left[55Y'_n - 59Y'_{n-1} + 37Y'_{n-2} - 9Y'_{n-3}\right] + \frac{251}{720}h^5 Y^{(5)}(\xi_n)$
- Rumus Adam–Moulton (implisit)
  1. $Y_{n+1} = Y_n + hY'_{n+1} - \frac{1}{2}h^2 Y''(\zeta_n)$
  2. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[Y'_{n+1} + Y'_n\right] - \frac{1}{12}h^3 Y^{(3)}(\zeta_n)$
  3. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{12}\left[5Y'_{n+1} + 8Y'_n - Y'_{n-1}\right] - \frac{1}{12}h^4 Y^{(4)}(\zeta_n)$
  4. $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{24}\left[9Y'_{n+1} + 19Y'_n - 5Y'_{n-1} + Y'_{n-2}\right] - \frac{19}{720}Y^{(5)}(\zeta_n)$

7.4.1. Algoritma ‘Predictor-Corrector

Rumus A-M membutuhkan penyelesaian iterasi, sedangkan rumus A-B tidak, tetapi A-M ketelitiannya lebih tinggi. Algoritma ‘predictor-corrector’ berusaha menggabungkan keuntungan kedua rumus diatas, sebagai berikut:

1. Gunakan rumus A-B untuk memperkirakan Y_{n+1} (predictor; rumus A-B)
2. Hitung Y_{n+1} memakai rumus A-M tanpa iterasi dengan memakai Y_{n+1} nilai dari a (corrector; rumusA-M)

Contoh:

1. A-B-M derajat 4:
   a. Predictor A-B
   $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right]$$
   b. Corrector A-B
   $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[9 f_{n+1} - 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right]$$
2. Rumus Milne derajat 4:
   a. Predictor
   $$y_{n+1} = y_{n-3} + \frac{4h}{3}\left(2 f_n - f_{n-1} + 2 f_{n-2}\right)$$
   b. Corrector
   $$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4 f_n + f_{n-1}\right)$$

Contoh penggunaan:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2} y = 0 \qquad y(0)=1 \rightarrow \text{hitung } y(1) = ?$$

Penyelesaiaan:

$y' = \frac{1}{2} y \rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2} y$ Catatan: solusi eksak $Y = e^{x/2}$

Digunakan h = 0.25

Euler $y_{n+1} = y_n + h f_n$

i	***x$_i$***	***y$_i$***	***f(x$_i$,y$_i$)***
n-3	0.00	1.0000	0.5000
n-2	0.25	1.1250	0.5625
n-1	0.50	1.2656	0.6328
n	0.75	1.4238	0.7119
n+1	1.00	1.6018	0.8009

A – B –4:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \tfrac{h}{24}\left[55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\right] \\ &= y_n + \tfrac{0.24}{24}\left[55(0.7119) - 59(0.6328) + 37(0.5625) - 9(0.50)\right] \\ &= 1.4238 + 0.18887 = 1.6127 \qquad \text{(predictor)} \end{aligned}$$

A-B-M-4:

$$f_{n+1} = \tfrac{1}{2} y_{n+1} = \tfrac{1}{2} \times 1.6127 = 0.8063$$
$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{24}\left[9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\right]$$
$$= 1.4238 + \tfrac{0.25}{24}\left[9(0.8063) + 19(0.7119) - 5(0.6328) + 0.5625\right]$$
$$= 1.4238 + 0.1894 = 1.6132 \qquad \text{(predictor - corrector)}$$

A-M-4:

$$f_{n+1} = \tfrac{1}{2} \times 1.6132 = 0.8066$$

Iterasi 2: $y_{n+1} = 1.4238 + \tfrac{0.25}{24}\left[9(0.8066) + 19(0.7119) - 5(0.6328) + 0.5625\right]$

$$= 0.613216$$
$$f_{n+1} = 0.8066$$

Iterasi 3: $y_{n+1} = 1.613217$

$\vdots$

$f_{n+1} = 0.80661$

Iterasi 9:

$y_{n+1} = 1.613217$

Tampak bahwa algoritma 'predictor-corrector sudah mencukupi dibandingkan dengan iterasi.

Tabel hasil

x	***e*^*x*/2**	**Euler**	**A-B-4**	**A-B-M-4**
0,00	1,0000	1,0000	-	-
0,25	1,13315	1,1250	-	-
0,50	1,28403	1,2656	-	-
0,75	1,45499	1,4238	-	-
1,00	1,64872	1,6018	1,6127	1,6132
		-2,846%	-2,185%	-2,154%

Untuk latihan: hitung $y(1)$ = ? dengan h = 0,125, bandingkan dengan hasil h = 0,25

DAFTAR PUSTAKA

Carnahan, Brice, H.A. Luther, James O. Wilkes, Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, New York, 1969.

Spiegel, R. Murray, Theory and Problems of Statistics, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill International Book Company, Singapore, 1981.

Al-Khafaji, Amir Wahdi, John R.Tooley, Numerical Methods in Engineering Practice, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1986.

Anonim, fx–7000G Owner's Manual, CASIO®

Atkinson, Kendall E., An Introduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1989.

James, M.L., G.M. Smith, J.C. Wolford, Applied Numerical Methods for Digital Computation with Fortran and CSMP, 2nd Edition, Harper International Edition, New York, 1977.