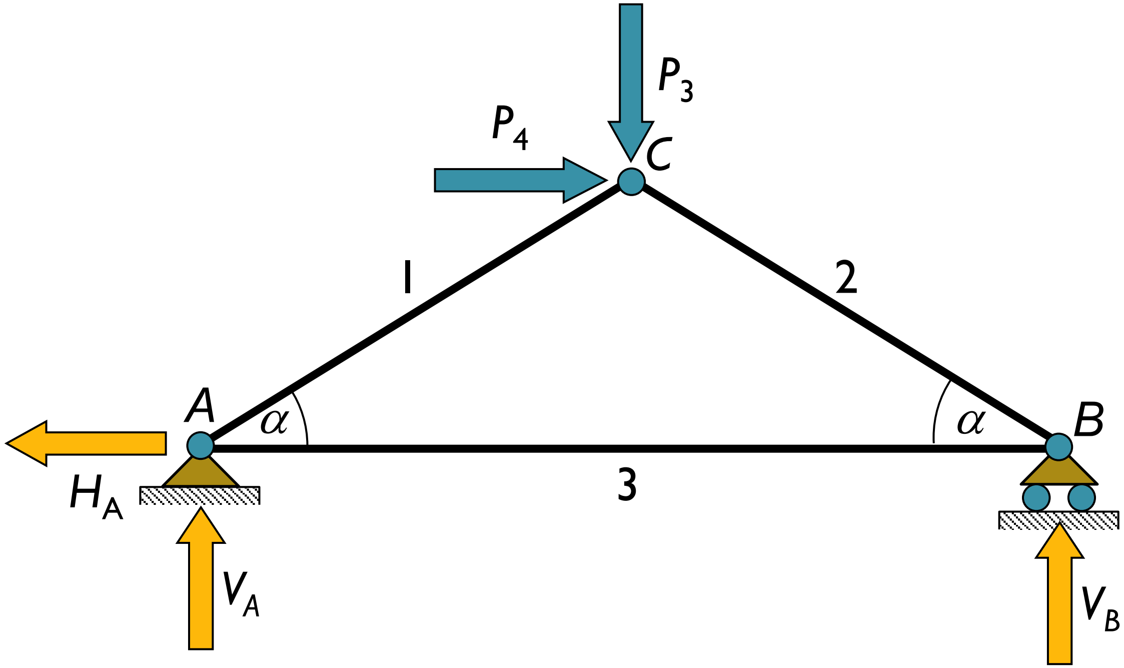
Sistem Persamaan Linier

Djoko Luknanto

Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan

FT UGM

Kuda-kuda dalam bentuk matriks



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ V_B \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_4 \\ P_3 \\ P_3 + P_4 \tan\alpha \\ P_3 \csc\alpha \\ P_4 \sec\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Penyelesaian dalam bentuk matriks

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & 1
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} H_A \\ V_A \\ V_B \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} P_4 \\ P_3 \\ P_3 + P_4 \tan\alpha \\ P_3 \csc\alpha \\ P_4 \sec\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

$$
[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{x}\} = \{\boldsymbol{B}\}
$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

1. Cara Langsung (Non-Iterasi): nilai $\{x\}$ dihitung secara langsung tanpa nilai awal.
   A. dengan eliminasi Gauss
   B. dengan metoda matrix invers
   C. dengan dekomposisi atas-bawah
2. Cara Iterasi: nilai $\{x\}$ dihitung secara berulang dengan nilai awal.
   A. dengan metoda Gauss-Jacobi
   B. dengan metoda Gauss-Seidel

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

A. Dengan eliminasi Gauss

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

1

2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & d_{12} & d_{13} \\ 0 & 1 & d_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

Cara 1. Eliminasi Gauss

Baris	Matrix Asli				RHS
1	4,000	3,000	2,000	1,000	1,000
2	3,000	5,000	3,000	2,000	5,000
3	2,000	3,000	6,000	3,000	3,000
4	1,000	2,000	3,000	4,000	2,000

Baris 1

Pengurang dari baris pertama

3/4	3,000	2,250	1,500	0,750	0,750
2/4	2,000	1,500	1,000	0,500	0,500
1/4	1,000	0,750	0,500	0,250	0,250

I. Forward Elimination

1a. Usahakan kolom pertama matrix asli menjadi $\{a_{11},0,0,0\}^t$ dengan mengurangi masing-masing baris dgn kelipatan dari Baris 1

motivasi

1	**4,000**	3,000	2,000	1,000	1,000	Biarkan Baris 1!
2	**0,000**	2,750	1,500	1,250	4,250	= Baris 2 - Baris 1 x (3,0/4,0)
3	**0,000**	1,500	5,000	2,500	2,500	= Baris 3 - Baris 1 x (2,0/4,0)
4	**0,000**	1,250	2,500	3,750	1,750	= Baris 4 - Baris 1 x (1,0/4,0)

hasil

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

B. Dengan Matriks Invers

$$[A]\{x\}=\{B\}$$

$$[A]^{-1}[A]\{x\}=[A]^{-1}\{B\}$$

$$[I]\{x\}=[A]^{-1}\{B\}$$

$$\{x\}=[A]^{-1}\{B\}$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

1. Dengan menggunakan matriks invers

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \text{atau} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \text{atau} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [A]^{-1} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

Cara mencari matrik invers

- Matriks invers sebaiknya dihindari; cara yang lebih efisien akan dijelaskan kemudian.

1. Bentuk [*A*]{*B*}[*I*]
2. Ubah menjadi [*I*]{*C*}[*A*]$^{-1}$ dengan cara
   - Eliminasi Gauss: ubah [*A*]→[*I*] maka:
     1) {*B*}→{*C*}
     2) [*I*]→[*A*]$^{-1}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}}_{\{B\}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[I]}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{[I]} \underbrace{\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}}_{\{x\}} \underbrace{\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}}_{[A]^{-1}}$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

C. Dekomposisi [*A*] = [*L*][*T*]

Perlu dicari matriks [*L*][*T*] dari matriks [*A*]

$$[A]\{x\} = \{B\}$$

$$[L][T]\{x\} = \{B\} \Rightarrow [L][T]$$

$$[L]\{y\} = \{B\} \Rightarrow \{y\}$$

$$[T]\{x\} = \{y\} \Rightarrow \{x\}$$

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

2. Dekomposisi [*A*] = [*L*][*T*]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} \text{atau} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \text{atau} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}}^{[L]} \overbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}}^{[T]}}_{[A]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Dekomposisi [A] = [L][T]

$$\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}}^{[L]} \overbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}}^{[T]}}_{[A]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix}}^{[L]} \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}}^{[T]} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}}_{\{Y\}} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

Dekomposisi [*A*] = [*L*][*T*]

$$\overbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\L_{21}&1&0\\L_{31}&L_{32}&1\end{bmatrix}}^{[L]}\underbrace{\begin{Bmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{Bmatrix}}_{\{Y\}}=\begin{Bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{Bmatrix}$$

$$1Y_1+0Y_2+0Y_3=b_1 \Rightarrow Y_1=b_1$$

$$L_{21}Y_1+1Y_2+0Y_3=b_2 \Rightarrow Y_2=b_2-L_{21}Y_1$$

$$L_{31}Y_1+L_{32}Y_2+1Y_3=b_3 \Rightarrow Y_3=b_3-L_{31}Y_1-L_{32}Y_2$$

Dekomposisi [*A*] = [*L*][*T*]

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$0x_1 + 0x_2 + T_{33}x_3 = Y_3 \Rightarrow x_3 = \frac{Y_3}{T_{33}}$$

$$0x_1 + T_{22}x_2 + T_{23}x_3 = Y_2 \Rightarrow x_2 = \frac{Y_2 - T_{23}x_3}{T_{22}}$$

$$T_{11}x_1 + T_{12}x_2 + T_{13}x_3 = Y_1 \Rightarrow x_1 = \frac{Y_1 - T_{12}x_2 - T_{13}x_3}{T_{11}}$$

Cari penyelesaian yang paling efisien …

SISTEM PERSAMAAN LINIER

Penyelesaian Sistem Persamaan Linier

$$[A]\{x\} = \{B\}$$

$$\{x\} = ?$$

Hindari!

$$\{x\} = \cancel{[A]}^{-1}\{B\}$$

Gunakan Eliminasi Gauss Biasa

- Dari latihan di kelas, kita mendapatkan bahwa dengan eliminasi Gauss biasa matriks **[*A*]** dapat didekomposisi menjadi **[*L*][*T*]** dengan mencatat faktor pengali eliminasi dan meletakkan pada posisi bawah diagonal yang digunakan untuk pivot.
- Dekomposisi **[*A*]** = **[*L*][*T*]** ➔ digunakan untuk menghitung **{*y*}** kemudian **{*x*}**.

Dekomposisi Cara Crout

- Terdapat cara dekomposisi yang disarankan oleh Crout, mahasiswa dapat melihat di tautan ini.
- Namun demikian jika diperhatikan lebih rinci, ternyata cara dekomposisi Crout menghasilkan matrik **[*L*][*T*]** yang merupakan transpos dari dekomposisi dengan eliminasi Gauss.
- Oleh karena itu menguasai secara baik eliminasi Gauss merupakan cara terbaik untuk menyelesaikan sistem persamaan linier.

Manajemen Memori Eliminasi Gauss Untuk Dekomposisi Bawah-Atas

Baris 1

Baris	Matrix Asli				RHS
1	4,000	3,000	2,000	1,000	1,000
2	3,000	5,000	3,000	2,000	5,000
3	2,000	3,000	6,000	3,000	3,000
4	1,000	2,000	3,000	4,000	2,000

Pengurang dari baris pertama

3/4	3,000	2,250	1,500	0,750	0,750
2/4	2,000	1,500	1,000	0,500	0,500
1/4	1,000	0,750	0,500	0,250	0,250

I. Forward Elimination

1a. Usahakan kolom pertama matrix asli menjadi $\{a_{11},0,0,0\}^t$ dengan mengurangi masing-masing baris dgn kelipatan dari Baris 1

motivasi

hasil

1	4,000	3,000	2,000	1,000	1,000	Biarkan Baris 1!
2	0,000	2,750	1,500	1,250	4,250	= Baris 2 - Baris 1 x (3,0/4,0)
3	0,000	1,500	5,000	2,500	2,500	= Baris 3 - Baris 1 x (2,0/4,0)
4	0,000	1,250	2,500	3,750	1,750	= Baris 4 - Baris 1 x (1,0/4,0)

Perbandingan Hasil Dekomposisi

Matrix Asli

4,000	3,000	2,000	1,000
3,000	4,000	3,000	2,000
2,000	3,000	4,000	3,000
1,000	2,000	3,000	4,000

Matriks Asli **[*A*]**

Matrix Segitiga Bawah-Atas

4,000	3,000	2,000	1,000
0,750	1,750	1,500	1,250
0,500	0,857	1,714	1,429
0,250	0,714	0,833	1,667

Dekomposisi Cara Gauss

Matrix Segitiga Bawah-Atas

4,000	0,750	0,500	0,250
3,000	1,750	0,857	0,714
2,000	1,500	1,714	0,833
1,000	1,250	1,429	1,667

Dekomposisi Cara Crout

Bandingkan hasil kedua cara dekomposisi

Matriks Tridiagonal

- Dalam dunia ketekniksipilan banyak dijumpai matriks tridiagonal terutama dalam penyelesaian numerik persamaan diferensial.
- Matriks tridiagonal $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ dengan $a_{ij} = 0$ untuk $|i - j| > 1$
- Bentuk matriksnya dapat dilihat dalam tayangan berikut

Matriks Tridiagonal

- Matriks yang anggotanya hanya terdapat pada diagonal, bawah dan atas diagonal.

$$
\begin{bmatrix}
a_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
b_2 & a_2 & c_2 & 0 & & \\
0 & b_3 & a_3 & c_2 & & \vdots \\
0 & 0 & & \ddots & & \\
\vdots & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\
0 & & \cdots & & b_n & a_n
\end{bmatrix}
$$

Nilai a_i, b_i, c_i diketahui

Matriks Tridiagonal

Nilai α_i dan γ_i dihitung

A* = *LU

$$
\overbrace{=\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & & \\ b_2 & \alpha_2 & 0 & & \\ 0 & b_3 & \alpha_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & b_n & \alpha_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & & \cdots & \\ 0 & 1 & \gamma_2 & & \\ & & \ddots & & \\ \vdots & & & 1 & \gamma_{n-1} \\ 0 & & & 0 & 1 \end{bmatrix}}
$$

$a_1 = \alpha_1 \qquad c_1 = \alpha_1\gamma_1$

$a_i = \alpha_i + b_i\gamma_{i-1} \qquad c_i = \alpha_i\gamma_i$

Matriks Tridiagonal

Dengan mengalikan ***LU*** = ***A*** diperoleh:

- $a_1 = \alpha_1$ dan $c_1 = \alpha_1\gamma_1$
- $a_i = \alpha_i + b_i\gamma_{i-1}$ untuk i = 2, 3, …, n
- $c_i = \alpha_i\gamma_i$ untuk i = 2, 3, …, n-1

dari persamaan di atas diperoleh langkah hitungan berikut ini:

- $\alpha_1 = a_1$ dan $\gamma_1 = c_1/\alpha_1$
- $\alpha_i = a_i - b_i\gamma_{i-1}$ $\gamma_i = c_i/\alpha_i$ untuk i = 2, 3, …, n-*1*

Koefisien α dan γ dihitung dan disimpan untuk hitungan-hitungan lanjutan …

Matriks Tridiagonal

- Nilai *x* dihitung dari [***A***]{***x***} = {***f***} yang diubah menjadi

  [***L***][***U***]{***x***} = {***f***}

  dengan [***U***]{***x***} = {***y***} dan [***L***]{***y***} = {***f***} sehingga {***y***} dihitung terlebih dahulu baru kemudian {***x***}:

$$y_1 = \frac{f_1}{\alpha_1} \quad y_i = \frac{f_i - b_i y_{i-1}}{\alpha_i} \quad i = 2,3,\ldots,n$$

$$x_n = y_n \quad x_i = y_i - \gamma_i x_{i+1} \quad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Matriks Pita

- Metoda penyelesaian untuk matriks tridiagonal ini dikenal dengan nama **Algoritma Thomas.**
- Untuk matriks pita yaitu matriks yang anggota bernilai tidak nol berada di sekitar diagonal, maka teknik yang sama dapat dilakukan dan secara umum disebut **Metoda Sapuan Ganda**.