I. ERROR

I.1. Pendahuluan

Teorema 1.1 : 'Nilai Antara'

Jika $f(x)$ suatu fungsi menerus pada $x \in [a,b]$

dan $m = \underset{a \leq x \leq b}{\text{Infimum}}\, f(x)$

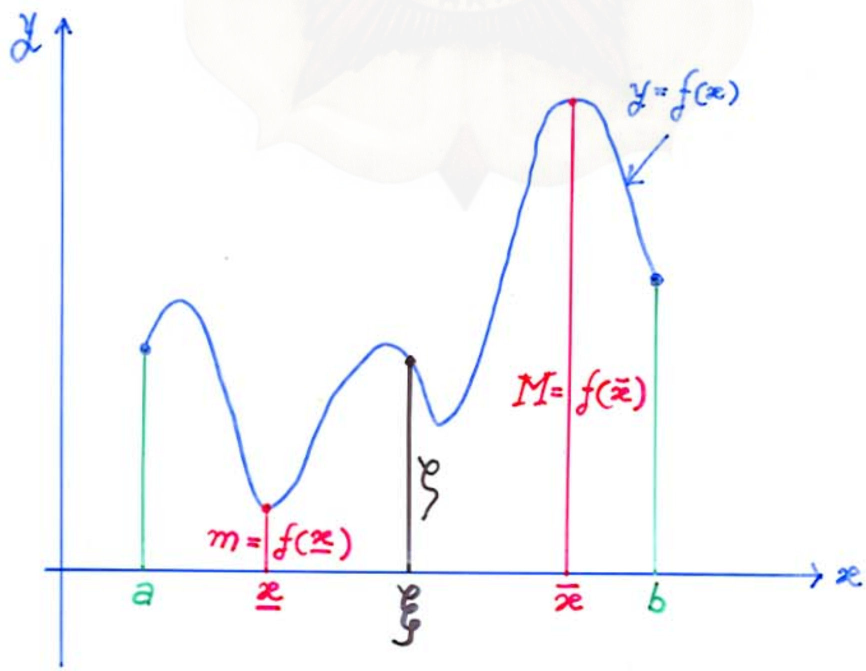
$M = \underset{a \leq x \leq b}{\text{Supremum}}\, f(x)$

Maka untuk setiap bilangan ζ pada interval tertutup $[m, M]$ paling tidak ada satu titik $\xi \in [a,b]$ sehingga

$$f(\xi) = \zeta$$

Khususnya ada dua titik $\underline{x}$ & $\bar{x} \in [a,b]$ dimana

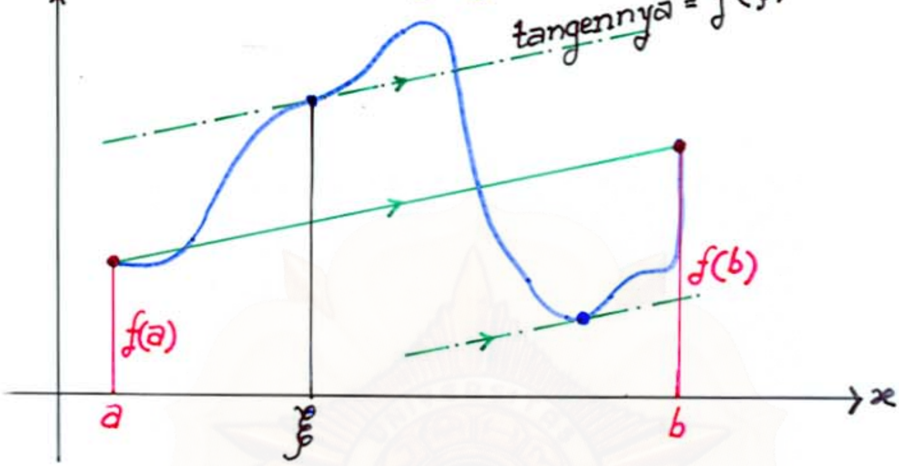
$$m = f(\underline{x}) \quad \text{dan} \quad M = f(\bar{x})$$



Teorema 1.2 : 'Nilai Tengah'

Jika $f(x)$ menerus pada interval $[a,b]$ serta turunan pertamanya ada dalam interval $x \in (a,b)$. Maka paling tidak ada satu titik $\xi \in (a,b)$ dimana

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

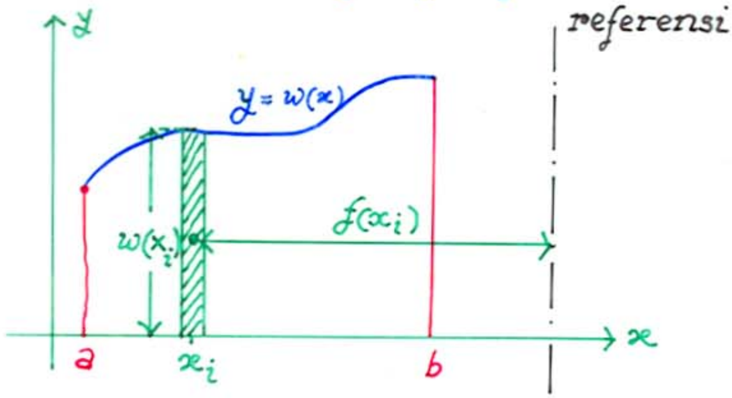


Teorema 1.3 : 'Nilai Tengah Integral'

Jika $w(x)$ tidak negatif & dapat dihitung integralnya pada interval $[a,b]$ dan $f(x)$ menerus pada $[a,b]$.
Maka

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b w(x)\, dx$$

untuk suatu titik $\xi \in [a,b]$



Teorema 1.4 : 'Deret Taylor'

Jika $f(x)$ mempunyai $n+1$ turunan dan turunannya selalu menerus pada $[a,b]$, dan jika $x, x_0 \in [a,b]$.

Maka

$$f(x) = p_n(x) + R_{n+1}(x)$$

dimana

$$p_n(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

$$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

untuk ξ diantara x_0 dan x.

Bukti :

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = f(x) - f(x_0)$$

$$\therefore\ f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt \qquad \text{ingat } \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

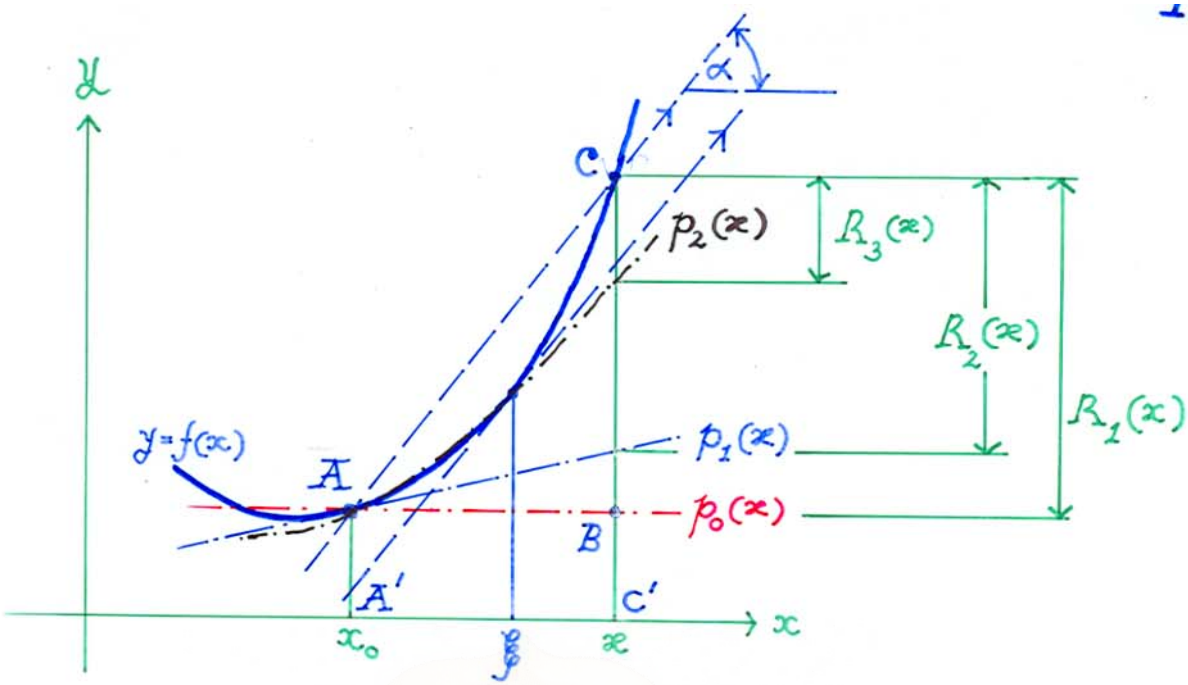
$$= \cdots + \left. t f'(t) \right]_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^{x} t\, df'(t)$$

$$= \cdots + (x-x_0) f'(x_0) + x\left(f'(x) - f'(x_0)\right) - \int_{x_0}^{x} t f''(t)\, dt$$

$$= \cdots + (x-x_0) f'(x_0) + x\int_{x_0}^{x} f''(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} t f''(t)\, dt$$

$$\therefore\ f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \int_{x_0}^{x} (x-t) f''(t)\, dt \qquad \text{dst}$$

$$= \cdots \qquad - \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f''(t)\, d(x-t)^2 \qquad \text{dst}$$



$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(\xi)$$

Secara geometri artinya

$$CC' = AA' + \underbrace{A'C' \times \tan\alpha}_{\text{kesalahan pemotongan}}$$

$$= AA' + A'C' \times \frac{BC}{AB}$$

$$= AA' + BC$$

AA': $p_0(x)$

BC: $R_1(x) = (x-x_0) f'(\xi)$

Jadi kesalahan pemotongan

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

$$\approx \text{konst} \times (x-x_0)^{n+1}$$

$$= \text{konst} \times \Delta x^{n+1}$$

$R_{n+1}(x)$ disebut sebagai kesalahan pemotongan order $n+1$ atau $O(\Delta x^{n+1})$

I.2. Bilangan Dalam Komputer

- Komputer menyajikan bilangan dalam 2 mode yaitu
  1) integer
  2) floating point

- Basis bilangan yang digunakan dalam komputer jarang sekali yang decimal (basis 10). Hampir semua komputer memakai basis 2 atau variannya seperti basis 8 dan basis 16

  basis 2 ↑ binari; basis 8 ↑ octal; basis 16 ↑ hexadecimal

Contoh

a. Pada basis 2, semua bilangan terdiri dari 2 angka yaitu 0 dan 1.

Jadi $(11011.01)_2 = 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 + 1.2^{-1} + 1.2^{-2}$
$= 27.25$

b. Pada basis 16, semua bilangan terdiri dari / dinyatakan dg angka 0, 1, ..., 9, A, B, ..., F

Jadi $(56C.F)_{16} = 5.16^2 + 6.16^1 + 12.16^0 + 15.16^{-1} = 1388.9375$

- Jika basis bilangan suatu komputer adalah β, maka suatu bilangan non-zero x disimpan didalam bentuk

$$x = \sigma \cdot (.a_1 a_2 a_3 \ldots a_t)_\beta \cdot \beta^e$$

dimana $\sigma = -1$ atau $+1$, $0 \leqslant a_i \leqslant \beta - 1$, e = integer, dan

$$(.a_1 a_2 \ldots a_t)_\beta = \frac{a_1}{\beta^1} + \frac{a_2}{\beta^2} + \quad + \frac{a_t}{\beta^t}$$

Keterangan: σ disebut tanda
e disebut eksponen → $L \leqslant e \leqslant U$
$(.a_1 a_2 \ldots a_t)$ disebut mantissa
β disebut radix
. disebut titik radix

- **Akurasi dari sajian 'floating-point' suatu komputer.**

Unit pembulatan, δ, suatu komputer adalah suatu bilangan positip terkecil yang mempunyai sifat bahwa

$$1 + \delta > 1$$

Nilai nol, ε, suatu komputer adalah suatu bilangan pos. terkecil dimana

$$1 + \varepsilon = 1$$

Secara praktis ε dan δ dapat dihitung sbb :

```
      ε = 1.0
10    ε = ε/2.0
      If ( 1.0+ε  .GT.  1.0) goto 10
      δ = ε * 2.0
```

- **Underflow and Overflow**

Jika suatu bilangan tidak mampu direpresentasikan oleh komputer karena $e < L$ atau $e > U$, maka akan terjadi under/overflow.

Jadi setiap bilangan harus berada dalam interval

$$x_L \leqslant |x| \leqslant x_U$$

dimana $x_L = \beta^{L-1}$ dan $x_U = (1-\beta^{-t}) \cdot \beta^U$

Dalam FORTRAN :
- jika suatu hasil hitungan, $|x| > x_U$, maka akan terjadi 'overflow error' dan program akan berhenti
- jika suatu hasil hitungan, $|x| < x_L$, maka akan terjadi 'underflow error', biasanya x nilainya menjadi nol dan hitungan terus berlanjut.

I.3. Definisi dan Asal 'error'

Dalam penyelesaian suatu masalah dicari jawaban yang sejati yang disimbolkan sebagai x_T, tetapi biasanya jawaban pendekatanlah yang didapat (ini disimbolkan sebagai x_A).

$$\text{Error}(x_A) \equiv x_T - x_A$$

Untuk banyak keperluan 'error' relatif dari x_A yang dibutuhkan:

$$\text{Rel}(x_A) \equiv \frac{x_T - x_A}{x_T}, \quad x_T \neq 0$$

Contoh: $x_T = e = 2.7182818\ldots$

$$x_A = \frac{19}{7} = 2.7142857\ldots$$

Jadi:

$$\text{Error}(x_A) = 0.003996\ldots$$
$$\text{Rel}(x_A) = 0.00147\ldots$$

- Angka signifikan (significant digits)

x_A dikatakan mempunyai m angka signifikan thd x_T jika kesalahan $(x_T - x_A)$ mempunyai nilai $\leqslant 5$ pada $(m+1)$ angka ke dari x_T dihitung kekanan dari angka non-zero didalam x_T.

Contoh:

a) $x_T = \frac{1}{3} = 0.33333\ldots \qquad x_A = 0.333 \qquad |x_T - x_A| = 0.00033$

karena pada angka ke 4 kesalahannya < 5, maka x_A dikatakan mempunyai 3 angka signifikan.

angka signifikan yang pertama

$x_T = .333333\ldots \qquad |x_T - x_A| = 0.00033$

angka signifikan terakhir

angka ke 1 2 3 4

b) $x_T = 23.496$ $\quad x_A = 23.494$ $\quad |x_T - x_A| = 0.002$

angka signif. terakhir

angka signifikan ke 1 ($\neq 0$)

Jadi x_A punya 4 angka signifikan

<5

c) $x_T = 0.02138$ $\quad x_A = 0.02144$ $\quad |x_T - x_A| = 0.00006$

angka signif. terakhir >5

angka signif. ke 1

Jadi x_A punya 2 angka signifikan (bukan 3)

Asal dari 'error'

1. Simplifikasi dan asumsi yang digunakan untuk merubah peristiwa alam kedalam formula matematik.
2. Kesalahan/keteledoran : kesalahan aritmetik dan programming
3. Ketidakpastian dalam data
4. Kesalahan mesin
5. Kesalahan matematis dalam kesalahan pemotongan

1.4. Rambatan 'Error'

- Ditentukan semua operasi aritmatik digantikan dgn tanda ω.

Jadi ω : + − × /

$\hat{\omega}$: + − × / versi komputer

- Misalkan x_A & y_A adalah bilangan yg akan digunakan dan kesalahannya terhadap x_T & y_T adalah

$$\varepsilon = x_T - x_A \qquad \eta = y_T - y_A$$

Jika dilakukan hitungan $x_A \hat{\omega} y_A$ maka kesalahannya adalah $x_T \omega y_T - x_A \hat{\omega} y_A =$

$$\underbrace{\left[x_T \omega y_T - x_A \omega y_A\right]}_{I} + \underbrace{\left[x_A \omega y_A - x_A \hat{\omega} y_A\right]}_{II}$$

I = kesalahan karena rambatan ('propagated error')

II = kesalahan karena 'rounding' ataupun 'chopping'

Contoh 'propagated error'

- Perkalian.

$$x_T y_T - x_A y_A = x_T y_T - (x_T - \varepsilon)(y_T - \eta)$$

$$= x_T \eta + y_T \varepsilon - \varepsilon \eta$$

$$Rel(x_A y_A) \equiv \frac{x_T y_T - x_A y_A}{x_T y_T} = \frac{\eta}{y_T} + \frac{\varepsilon}{x_T} - \frac{\varepsilon}{x_T}\frac{\eta}{y_T}$$

$$= Rel(x_A) + Rel(y_A) - Rel(x_A).Rel(y_A)$$

Jika $|Rel(x_A)|, |Rel(y_A)| \ll 1$, maka

$$Rel(x_A y_A) = Rel(x_A) + Rel(y_A)$$

- Pembagian

$$Rel\left(\frac{x_A}{y_A}\right) = \frac{\frac{x_T}{y_T} - \frac{x_A}{y_A}}{\frac{x_T}{y_T}} = \frac{\frac{x_T}{y_T} - \frac{x_T - \varepsilon}{y_T - \eta}}{\frac{x_T}{y_T}}$$

$$= 1 - \frac{(x_T - \varepsilon) y_T}{(y_T - \eta) x_T} = \frac{x_T y_T - \eta x_T - x_T y_T + \varepsilon y_T}{x_T y_T - \eta x_T}$$

$$Rel\left(\frac{x_A}{y_A}\right) = \frac{Rel(x_A) - Rel(y_A)}{1 - Rel(y_A)}$$

Jika $|Rel(y_A)| \ll 1$, maka

$$Rel\left(\frac{x_A}{y_A}\right) = Rel(x_A) - Rel(y_A)$$

- Tampak bahwa pada perkalian dan pembagian 'kesalahan relatif' tidak membesar secara cepat.

- Penjumlahan & Pengurangan

$$(x_T \pm y_T) - (x_A \pm y_A) = (x_T - x_A) \pm (y_T - y_A) = \varepsilon \pm \eta$$

$$Error\,(x_A \pm y_A) = Error\,(x_A) \pm Error\,(y_A)$$

Penjabaran ini tampak logis tetapi tidak baik karena tidak dinyatakan dalam 'kesalahan relatif'

Contoh: $x_T = \pi$, $x_A = 3.1416$, $y_T = 22/7$, $y_A = 3.1429$

$x_T - x_A = -7.35 \times 10^{-6}$ $\quad$ $Rel(x_A) = -2.34 \times 10^{-6}$

$y_T - y_A = -4.29 \times 10^{-5}$ $\quad$ $Rel(y_A) = -1.36 \times 10^{-5}$

$$(x_T - y_T) - (x_A - y_A) = -0.0012645 - (-0.0013) = 3.55 \times 10^{-5}$$

$$Rel\,(x_A - y_A) = -0.028$$

Jadi meskipun kesalahan pada $(x_A - y_A)$ adalah kecil tetapi 'kesalahan relatif' nya cukup besar melebihi $Rel(x_A)$ ataupun $Rel(y_A)$.