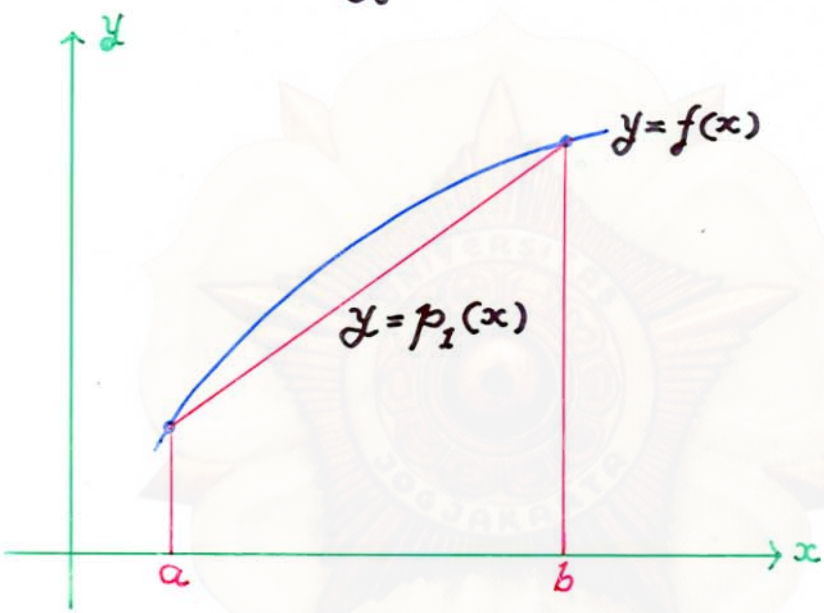
IV. INTEGRASI NUMERIS

IV.1. Rumus trapesium dan Simpson

Pada bab ini akan dibicarakan cara mencari integral secara numeris dari:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

dimana $[a,b]$ berhingga.



Rumus trapesium pada dasarnya adalah mendekati $f(x)$ dgn garis lurus yang melalui $(a, f(a))$ & $(b, f(b))$

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]$$

Error :

$$f(x) - p_1(x) = f(x) - \left\{ \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \right\}$$

$$= (x-a)(x-b)\, f[a,b,x]$$

ingat definisi 'beda terbagi'

Jadi 'error' :

$$E_1(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$= \int_a^b (x-a)(x-b)\, f[a,b,x]\,dx$$

dgn harga tengah integral, didapat

$$E_1(f) = f[a,b,\xi] \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx \qquad a \leqslant \xi \leqslant b$$

$$= \left\{\frac{1}{2} f''(\eta)\right\}\left\{-\frac{1}{6}(b-a)^3\right\} \qquad \eta \in [a,b]$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$$

Jika interval $[a,b]$ dibagi menjadi n pias sehingga untuk $n \geqslant 1$, $h = (b-a)/n$, dan $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$ didapat :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{2} h \left[f(x_{j-1}) + f(x_j)\right] - \frac{1}{12} h^3 f''(\eta_j) \right\}$$

dimana $x_{j-1} \leqslant \eta_j \leqslant x_j$

Sehingga integralnya dapat didekati dgn

$$I_n(f) = h\left[\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n\right] \qquad n \geqslant 1$$

- Kesalahan $I_n(f)$ thd $I(f)$ adalah

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} -\frac{1}{12} h^3 f''(\eta_j)$$
$$= -\frac{1}{12} h^3 n \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\eta_j)\right]$$

Perlu diingat bahwa

$$\underset{a\le x\le b}{\mathrm{Min}}\, f''(x) \le \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f''(\eta_j) \le \underset{a\le x\le b}{\mathrm{Max}}\, f''(x)$$

karena $f''(x)$ menerus pada $a \le x \le b$, maka

$$E_n(f) = -\frac{1}{12} h^3 n\, f''(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$
$$= -\frac{1}{12} h^2 (b-a) f''(\eta)$$
$$= -\frac{1}{12} \frac{(b-a)^3}{n^2} f''(\eta)$$

- Estimasi kesalahan asimtotis ($\tilde{E}_n(f)$)

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{Limit}} \frac{E_n(f)}{h^2} = \underset{n\to\infty}{\mathrm{Limit}} \left[-\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n} f''(\eta_j) h\right]$$
$$= -\frac{1}{12} \underset{n\to\infty}{\mathrm{Limit}} \sum_{j=1}^{n} f''(\eta_j) h$$
$$= -\frac{1}{12} \int_a^b f''(x)\, dx$$
$$= -\frac{1}{12} \left\{ f'(b) - f'(a) \right\}$$

maka $\tilde{E}_n(f) \equiv -\frac{h^2}{12} \left\{ f'(b) - f'(a) \right\}$

Definisi :

Jika $E_n(f)$ adalah kesalahan eksak, sedangkan $\tilde{E}_n(f)$ adalah estimasi darinya, maka $\tilde{E}_n(f)$ disebut estimasi kesalahan asimtotis dari $E_n(f)$ jika :

$$\underset{n\to\infty}{\text{Limit}} \frac{\tilde{E}_n(f)}{E_n(f)} = 1$$

atau

$$\underset{n\to\infty}{\text{Limit}} \frac{E_n(f) - \tilde{E}_n(f)}{E_n(f)} = \phi$$

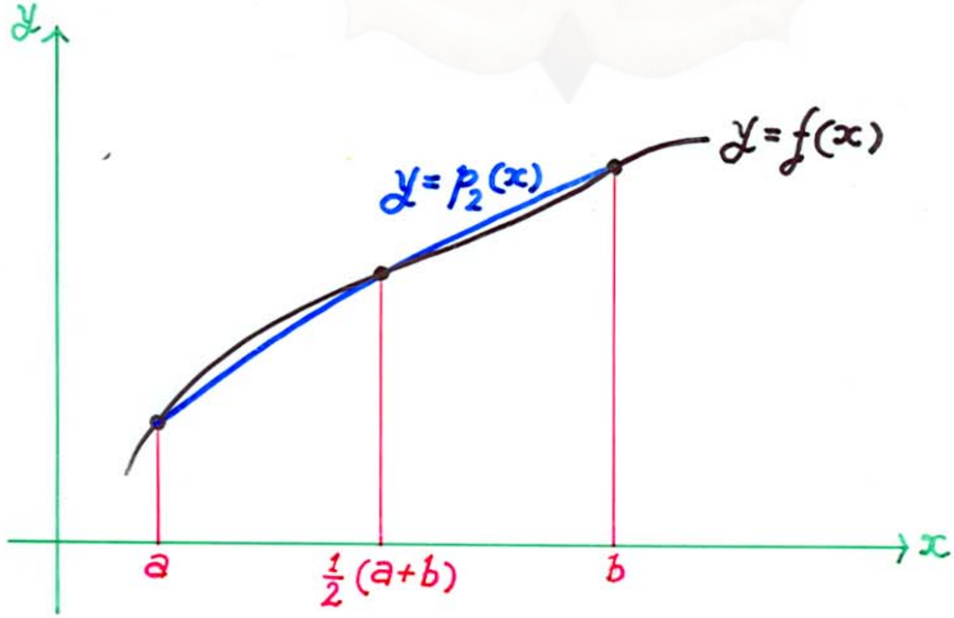
- **Rumus trapesium terkoreksi.**

Dengan menggunakan $\tilde{E}_n(f)$, rumus trapesium dapat ditingkatkan menjadi :

$$CT_n(f) = I_n(f) + \tilde{E}_n(f)$$

$$= h\left[\tfrac{1}{2}f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \tfrac{1}{2}f_n\right] - \frac{h^2}{12}\left[f'(b) - f'(a)\right]$$

- **Rumus Simpson**



Dalam metoda Simpson fungsi $f(x)$ didekati dengan $p_2(x)$ yang melalui 3 titik $(a,f(a))$, $(c,f(c))$ dan $(b,f(b))$ dimana $c=(a+b)/2$.

$$I_2(f)=\int_a^b\left[\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b)\right]dx$$

$$=\frac{h}{3}\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right] \quad \text{dimana } h=(b-a)/2$$

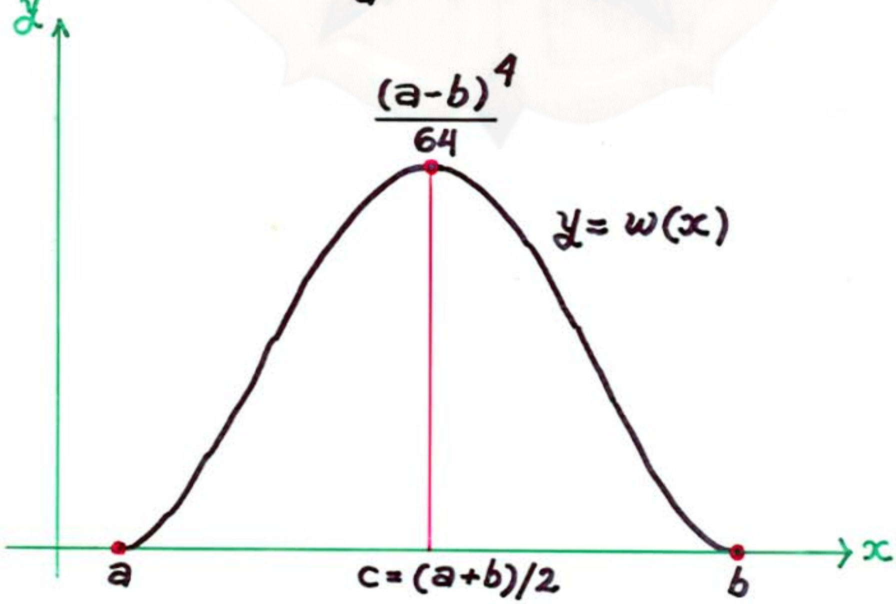
Kesalahannya :

$$E_2(f)=I(f)-I_2(f)$$

$$=\int_a^b (x-a)(x-c)(x-b)\,f[a,b,c,x]\,dx$$

Harga tengah integral tidak dapat digunakan karena $(x-a)(x-c)(x-b)$ berganti tanda pada $x=c$.

Didefinisikan : $w(x)=\int_a^x (t-a)(t-c)(t-b)\,dt$



Beberapa fakta mengenai $w(x)$

$$w(a) = w(b) = 0\,,\quad w(c) = \frac{(a-b)^4}{64}\,,\quad w(x) > 0 \text{ utk } a < x < b$$

$$w'(x) = (x-a)(x-c)(x-b)$$

Jadi $E_2(f)$ dapat ditulis sebagai :

$$E_2(f) = \int_a^b w'(x)\, f[a,b,c,x]\, dx$$

$$= \Big[w(x)\, f[a,b,c,x]\Big]_a^b - \int_a^b w(x)\, \frac{d}{dx} f[a,b,c,x]$$

$$= -\int_a^b w(x)\, f[a,b,c,x,x]\, dx$$

$$= -f[a,b,c,\xi,\xi] \int_a^b w(x)\, dx \qquad \xi \in [a,b]$$

$$= -\frac{f^{(4)}(\eta)}{24}\left[\frac{4}{15} h^5\right]$$

$$= -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

Jika interval $[a,b]$ dibagi menjadi n pias, $n \geq 2$, $h = (b-a)/n$
$x_j = a + jh$ untuk $j = 0, 1, \quad , n$, sehingga

$$I(f) = \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)\, dx \qquad n = \text{genap}$$

$$= \sum_{j=1}^{n/2} \left\{ \frac{h}{3}\left[f_{2j-2} + 4 f_{2j-1} + f_{2j}\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\eta_j) \right\}$$

dimana $x_{2j-2} \leq \eta_j \leq x_{2j}$

Rumus Simpson :

$$I_n(f) = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

Kesalahan estimasi $I_n(f)$:

$$E_n(f) = I(f) - I_n(f) = -\frac{h^5(n/2)}{90} \cdot \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}(\eta_j)$$

$$= -\frac{h^4(b-a)}{180} f^{(4)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{180\,n^4} f^{(4)}(\eta)$$

Estimasi kesalahan asimtotis : $\tilde{E}_n(f) = -\frac{h^4}{180}\left[f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)\right]$

IV.2. Rumus Newton - Cotes

Rumus trapesium dan Simpson sebetulnya merupakan dua buah rumus pertama dari rumus Newton - Cotes.

Untuk $n \geq 1$, $h = (b-a)/n$, $x_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Didefinisikan $I_n(f)$ dengan mengganti $f(x)$ dengan polinomial $p_n(x)$ pada titik-titik $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \doteq I_n(f) = \int_a^b p_n(x)\,dx$$

Dengan interpolasi Lagrange utk $p_n(x)$, maka

$$I_n(f) = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} l_{j,n}(x)\, f(x_j)\, dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n} w_{j,n}\, f(x_j)$$

$$w_{j,n} = \int_a^b \ell_{j,n}(x)\,dx \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

Untuk nilai $n = 1$ dan 2 telah disajikan sebagai rumus trapesium dan Simpson. Sekarang untuk $n = 3$, contoh untuk menghitung w_0 adalah :

$$w_0 = \int_a^b \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\,dx$$

Jika $x = x_0 + \mu h$, $0 \leqslant \mu \leqslant 3$, maka

$$w_0 = \int_{x_0}^{x_3} -\frac{1}{6h^3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\,dx$$

$$= -\frac{1}{6h^3}\int_0^3 (\mu-1)h\,(\mu-2)h\,(\mu-3)h \cdot h\,d\mu$$

$$= -\frac{h}{6}\int_0^3 (\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\,d\mu = \frac{3h}{8}$$

Jika w_1, w_2, w_3 dihitung dengan cara di atas, akhirnya akan didapat utk $n = 3$

$$I_3(f) = \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

Kesalahan pada $I_n(f)$ dinyatakan sbb :

a) Utk n genap :

$$E_n(f) = C_n h^{n+3} f^{(n+2)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

dimana $C_n = \dfrac{1}{(n+2)!}\displaystyle\int_0^n \mu^2(\mu-1)\ldots(\mu-n)\,d\mu$

b) Untuk n gasal :

$$E_n(f) = C_n h^{n+2} f^{(n+1)}(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

dimana $C_n = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^n \mu(\mu-1)\dots(\mu-n)\,d\mu$

- Rumus Newton - Cotes

$n=1$, rumus trapesium

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$n=2$, rumus Simpson

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

$n=3$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f(a)+3f(a+h)+3f(b-h)+f(b)\right] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$

$n=4$, rumus Boole

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\left[7f(a)+32f(a+h)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f(b-h)+7f(b)\right] - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$$

- Definisi : Integrasi numerik $\tilde{I}(f)$ yang mendekati $I(f)$ disebut mempunyai derajad ketepatan m jika
  1) $\tilde{I}(f) = I(f)$ utk semua polinomial $f(x)$ derajad $\leq m$
  2) $\tilde{I}(f) \neq I(f)$ utk bbrp polinomial f derajad $m+1$

Contoh :
Pada rumus Newton - Cotes utk $n = 1,3$ dikatakan mempunyai derajad ketepatan $m = 1,3$. Sedangkan utk $n = 2,4$ mempunyai derajad ketepatan $m = n+1 = 3,5$.

Tampak bahwa rumus N-C dengan n genap menghasilkan derajad ketepatan extra dibanding dgn n gasal.

- Ada rumus Newton - Cotes yang tidak menggunakan salah satu atau kedua titik diujung interval. Contoh yang paling sederhana adalah rumus titik tengah :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

Rumus kompositnya :

$$\int_a^b f(x)\,dx = I_n(f) + E_n(f)$$

$$I_n(f) = h\left[f(x_1) + \cdots + f(x_n)\right]$$

$$E_n(f) = \frac{h^2(b-a)}{24} f''(\eta) \qquad \eta \in [a,b]$$

dimana : $h = (b-a)/n$

$x_j = a + (j - \frac{1}{2})h$ sebagai titik tengah dari titik titik $(a + (j-1)h,\ a + jh)$

untuk $j = 1, 2, \ldots, n$

Rumus N-C yang demikian ini disebut dengan rumus terbuka, sedangkan rumus yang terdahulu disebut tertutup.

- Rumus Newton - Cotes terbuka.

$n = 2$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2h\,f(x_1) + \frac{h^3}{3} f''(\xi)$$

$n = 3$

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi)$$

$n = 4$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}\left[2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)\right] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi)$$

$n = 5$

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)\,dx = \frac{5h}{24}\left[11f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + 11f(x_4)\right] + \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\xi)$$

dimana $h = (x_n - x_0)/n$

batas bawah

batas atas

IV.3. Kuadratur Gaussian

Pada metoda integrasi sebelumnya, rumus integrasinya berdasarkan polinomial derajad rendah yang merupakan pendekatan $f(x)$ dengan jumlah pias semakin besar.
Kuadratur Gaussian, rumus integrasinya menggunakan polinomial yang derajadnya makin tinggi.

$$I(f) = \int_a^b w(x)\, f(x)\, dx \doteq \sum_{j=1}^{n} w_{j,n}\, f(x_{j,n}) = I_n(f)$$

Sebagai ilustrasi :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \doteq \sum_{j=1}^{n} w_j\, f(x_j)$$

dimana $w(x) \equiv 1$. Faktor pemberat $\{w_j\}$ dan titik nodal $\{x_j\}$ dipilih sedemikian sehingga kesalahan

$$E_n(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx - \sum_{j=1}^{n} w_j\, f(x_j)$$

sama dengan nol untuk suatu polinomial $f(x)$ dengan derajad setinggi mungkin.

$$E_n(a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m) = a_0 E_n(1) + a_1 E_n(x) + \dots + a_m E_n(x^m)$$

Jadi $E_n(f) = 0$ untuk setiap polinomial derajad $\leqslant m$ iff

$$E_n(x^i) = 0 \qquad i = 0, 1, \dots, m$$

- Kasus 1. $n=1$. Karena hanya 2 parameter, w_1 dan x_1 sehingga diperlukan 2 persamaan :

$$E_n(1)=0 \qquad E_n(x)=0$$

Jadi $\displaystyle\int_{-1}^{1} 1\,dx - w_1 = 0 \qquad \int_{-1}^{1} x\,dx - w_1 x_1 = 0$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$w_1 = 2 \qquad\qquad x_1 = 0$$

sehingga $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \doteq 2f(0)$

- Kasus 2. $n=2$. Ada 4 parameter w_1, w_2, x_1, x_2 sehingga dibutuhkan 4 persamaan :

$$E_n(x^i) = \int_{-1}^{1} x^i\,dx - (w_1 x_1^i + w_2 x_2^i) = 0$$

untuk $i = 0, 1, 2, 3$

atau

$$w_1 + w_2 = 2 \qquad w_1 x_1 + w_2 x_2 = 0$$

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \qquad w_1 x_1^3 + w_2 x_2^3 = 0$$

menghasilkan rumus :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right) + f\left(\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\right)$$

mempunyai derajad ketelitian 3. Bandingkan dengan rumus Simpson yang menggunakan tiga titik.

Kasus 3. Untuk n, terdapat $2n$ parameter $\{w_i\}$ dan $\{x_i\}$ sehingga terdapat $2n$ persamaan

$$E_n(x^i) = 0 \qquad i = 0, 1, \ldots, 2n-1$$

atau

$$\sum_{j=1}^{n} w_j x_j^i = \begin{cases} 0 & i = 1, 3, \ldots, 2n-1 \\ \dfrac{2}{i+1} & i = 0, 2, \ldots, 2n-2 \end{cases}$$

persamaan diatas merupakan sistim persamaan non-linier yang penyelesaiannya tidak selalu jelas. Oleh karena itu digunakan cara lain.

- Kuadratur Gauss - Legendre

Untuk $w(x) \equiv 1$, rumus Gauss pada interval $[-1,1]$ adalah

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \doteq \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

dengan titik x_j adalah akar dari polinomial Legendre derajad n dalam interval $[-1,1]$. Faktor pemberatnya adalah

$$w_i = \frac{-2}{(n+1)\, P_n'(x_i)\, P_{n+1}(x_i)} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

dan

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\left[(2n)!\right]^2} \, \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}$$

Table 5.10 Gauss–Legendre nodes and weights

n	x_i	w_i
2	$\pm$.5773502692	1.0
3	$\pm$.7745966692	.5555555556
	0.0	.8888888889
4	$\pm$.8611363116	.3478546451
	$\pm$.3399810436	.6521451549
5	$\pm$.9061798459	.2369268851
	$\pm$.5384693101	.4786286705
	0.0	.5688888889
6	$\pm$.9324695142	.1713244924
	$\pm$.6612093865	.3607615730
	$\pm$.2386191861	.4679139346
7	$\pm$.9491079123	.1294849662
	$\pm$.7415311856	.2797053915
	$\pm$.4058451514	.3818300505
	0.0	.4179591837
8	$\pm$.9602898565	.1012285363
	$\pm$.7966664774	.2223810345
	$\pm$.5255324099	.3137066459
	$\pm$.1834346425	.3626837834

Contoh :

- $n=2$ $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f(\underbrace{0.5773502692}_{\frac{1}{3}\sqrt{3}}) + f(\underbrace{-0.5773502692}_{-\frac{1}{3}\sqrt{3}})$$

$n=3$ $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.5555555556\, f(0.7745966692) + 0.5555555556\, f(-0.7745966692) + 0.8888888889\, f(0)$$

- Untuk integral pada interval umum $[a,b]$, maka digunakan transformasi sbb :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{2}(b-a)\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b+(b-a)x}{2}\right) dx$$

$$\approx \frac{1}{2}(b-a)\sum_{j=1}^{n} w_j\, f\left(\frac{a+b+(b-a)x_j}{2}\right)$$

- $$\int_1^3 (x^3+x^2+x+1)\,dx = 34\frac{2}{3}$$

Dihitung dengan kuadratur Gaussian menghasilkan :

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(3-1)\left[1.0 \times f\left(\frac{1+3+(3-1)\frac{1}{3}\sqrt{3}}{2}\right) + 1.0 \times f\left(\frac{1+3+(3-1)(-\frac{1}{3}\sqrt{3})}{2}\right)\right]$$

$$= f(2+\tfrac{1}{3}\sqrt{3}) + f(2-\tfrac{1}{3}\sqrt{3})$$

$$= 34.66666667$$

Orthogonal Polynomials

Kuadratur Gauss-Legendre menggunakan polinomial orthogonal Legendre. Ada banyak famili polinomial yang orthogonal. Secara umum suatu famili polinomial $g_k(x)$ disebut ortogonal thd fungsi pemberat $w(x)$, jika

$$\int_a^b w(x)\, g_n(x)\, g_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\int_a^b w(x) \left[g_n(x)\right]^2 dx = C(n) \neq 0$$

Contoh : set $\{\sin kx\}$ dan $\{\cos kx\}$

» Polinomial Legendre : $P_n(x) \rightarrow$ ortogonal pada interval $[-1,1]$ thd $w(x)=1$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\int_{-1}^{1} \left[P_n(x)\right]^2 dx = C(n) \neq 0$$

Beberapa $P_n(x)$:

$P_0(x) = 1$
$P_1(x) = x$
$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$
$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$
$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

Rumus rekursiv :

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n}\, x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)$$

» Polinomial Laguerre : $\mathcal{L}_n(x) \rightarrow$ ortogonal pada $[0,\infty]$ dengan $w(x) = e^{-x}$

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathcal{L}_n(x)\,\mathcal{L}_m(x)\,dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\left[\mathcal{L}_n(x)\right]^2 dx = c(n) \neq 0$$

Beberapa $\mathcal{L}_n(x)$:

$$\mathcal{L}_0(x) = 1$$
$$\mathcal{L}_1(x) = -x+1$$
$$\mathcal{L}_2(x) = x^2 - 4x + 2$$
$$\mathcal{L}_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$$

Rumus rekursiv : $\mathcal{L}_n(x) = (2n-x-1)\mathcal{L}_{n-1}(x) - (n-1)^2\mathcal{L}_{n-2}(x)$

» Polinomial Chebysev : $T_n(x) \rightarrow$ ortogonal pada $[-1,1]$ dgn $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\left[T_n(x)\right]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = c(n) \neq 0$$

Beberapa $T_n(x)$:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

Rumus rekursiv : $T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$

» Polinomial Hermite : $H_n(x) \rightarrow$ ortogonal pada $[-\infty, \infty]$ dgn $w(x) = e^{-x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)\, H_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2\, dx = c(n) \neq 0$$

Beberapa $H_n(x)$:

$$H_0(x) = 1$$
$$H_1(x) = 2x$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$
$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

Rumus rekursiv : $H_n(x) = 2x H_{n-1}(x) - 2(n-1) H_{n-2}(x)$

» Kuadratur Gauss - Laguerre :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

Kuadratur ini dapat dipakai utk menghitung :

$$\int_a^{\infty} e^{-t} f(t)\, dt = e^{-a} \int_0^{\infty} e^{-x} f(x+a)\, dx$$

$$= e^{-a} \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j + a)$$

dimana w_j = faktor pemberat

x_j = akar dari polinomial Laguerre

- w_j dan x_j dari kuadratur Gauss - Laguerre

n	w_j	x_j
2	0.85355 33905	0.58578 64376
	0.14644 66094	3.41421 35623
3	0.71109 30099	0.41577 45567
	0.27851 77335	2.29428 03602
	0.01038 92565	6.28994 50829
4	0.60315 41043	0.32254 76896
	0.35741 86924	1.74576 11011
	0.03888 79085	4.53662 02969
	0.00053 92947	9.39507 09123

- Kuadratur Gauss - Chebysev

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

dimana $w_j = \dfrac{\pi}{n}$

$$x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right) \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\int_a^b f(t)\, dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underbrace{\left[\sqrt{1-x^2}\, f\left(\frac{a+b+(b-a)x}{2}\right)\right]}_{F(x)} dx$$

$$= \frac{(b-a)\pi}{2n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{1-x_j^2}\, f\left(\frac{a+b+(b-a)x_j}{2}\right)$$

Kuadratur Gauss-Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n} w_j f(x_j)$$

n	w_j	x_j
2	0.88622 69255	± 0.70710 67811
3	0.29540 89752	± 1.22474 48714
	1.18163 59006	0.0
4	0.08131 28354	± 1.65068 01239
	0.80491 40900	± 0.52464 76233
5	0.01995 32421	± 2.02018 28705
	0.39361 93232	± 0.95857 24646
	0.94530 87205	0.0