

Analisis Frekuensi di bidang sumberdaya air

oleh

Djoko Luknanto

Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan
FT UGM

Distribusi Normal $N(\mu=0, \sigma=1)$

$$y = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

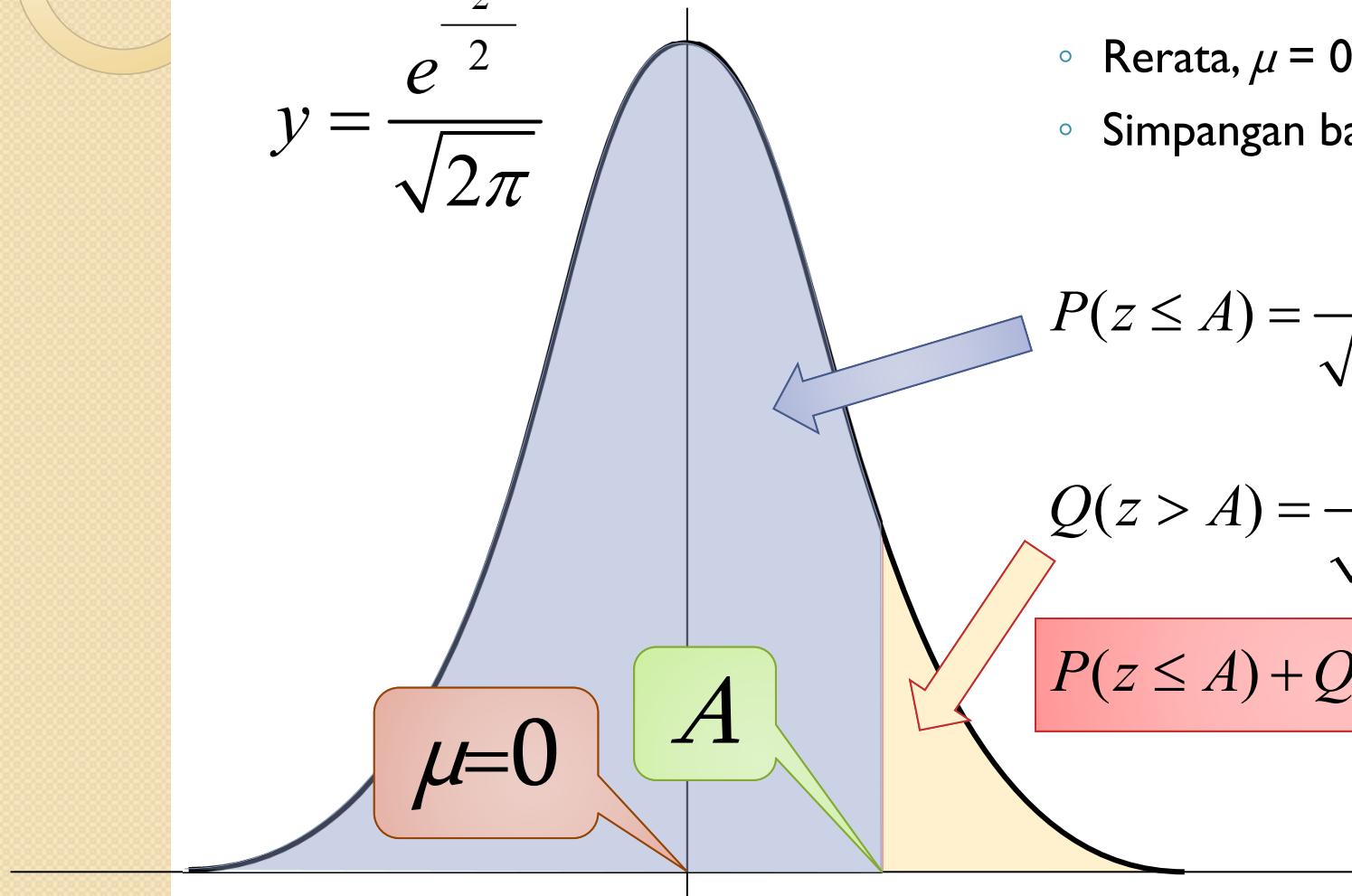
Distribusi Normal dengan

- Rerata, $\mu = 0$
- Simpangan baku, $\sigma = 1$

$$P(z \leq A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^A e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$Q(z > A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$P(z \leq A) + Q(z > A) = 1$$

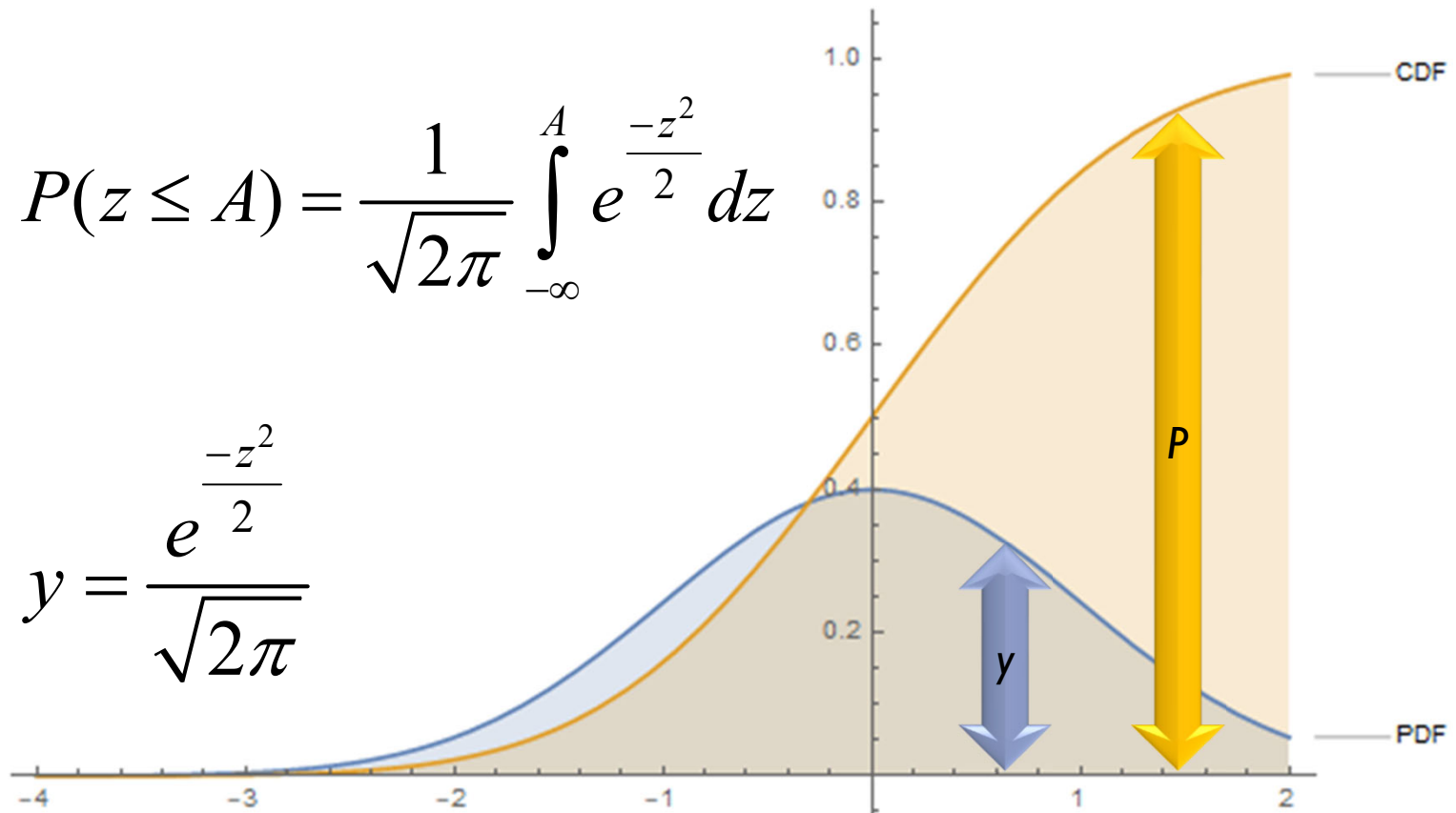


PDF dan CDF

Distribusi Normal $N(\mu=0, \sigma=1)$

$$P(z \leq A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^A e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

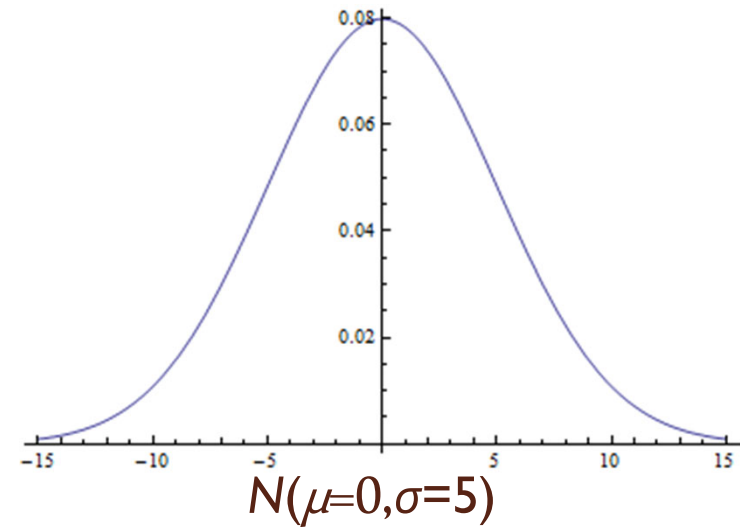
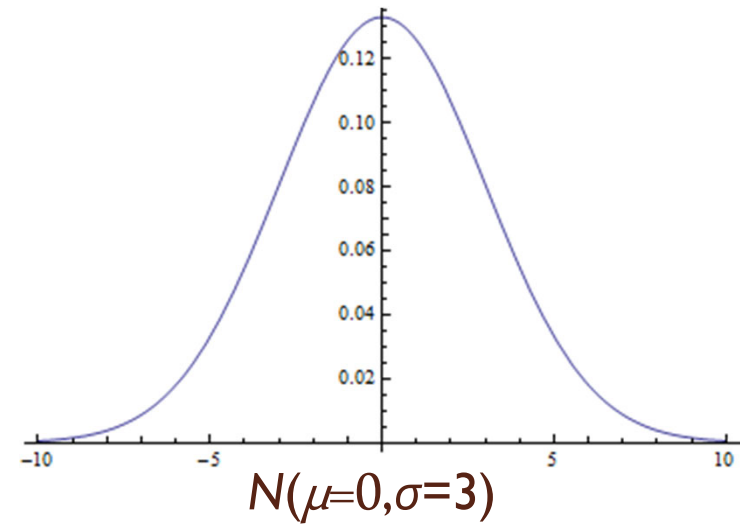
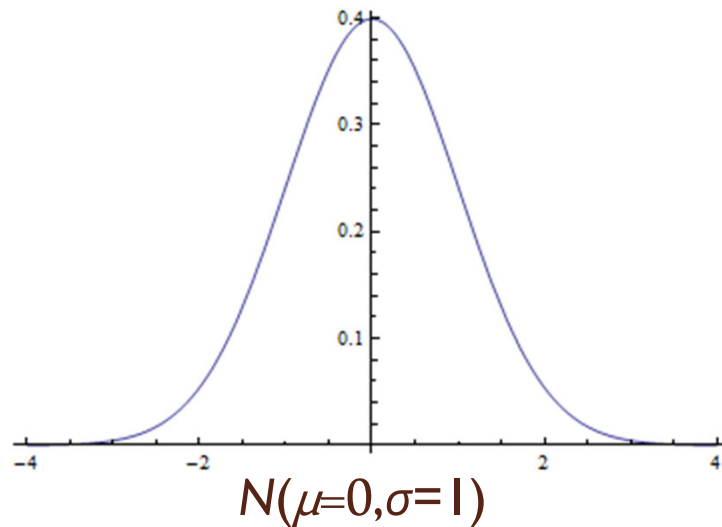
$$y = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$



Distribusi Normal $N(\mu=0, \sigma)$

Distribusi Normal dengan

- Rerata, $\mu = 0$
- Simpangan baku, $\sigma = 1$
- Simpangan baku, $\sigma = 3$
- Simpangan baku, $\sigma = 5$



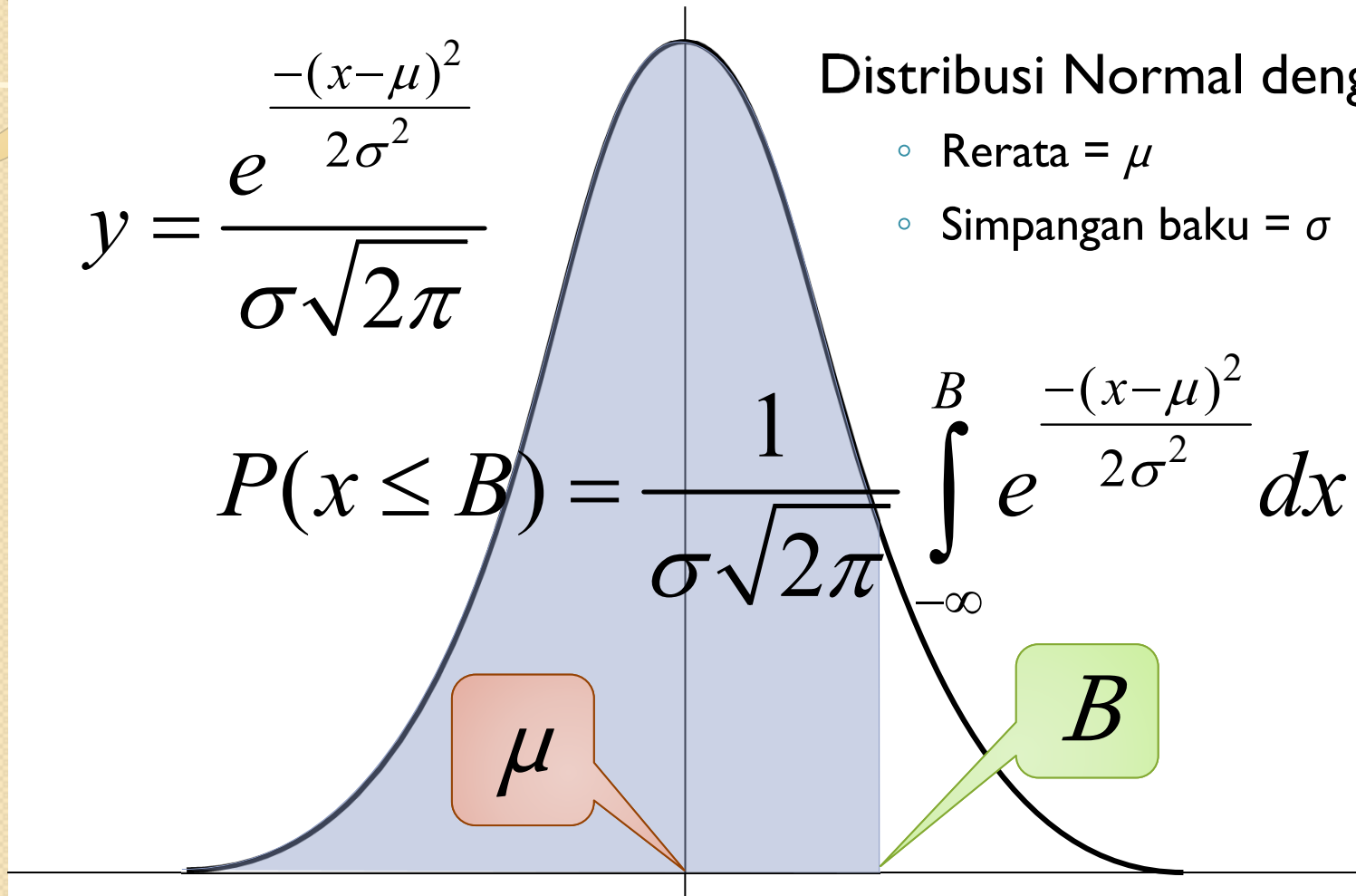
Distribusi Normal $N(\mu, \sigma)$

$$y = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

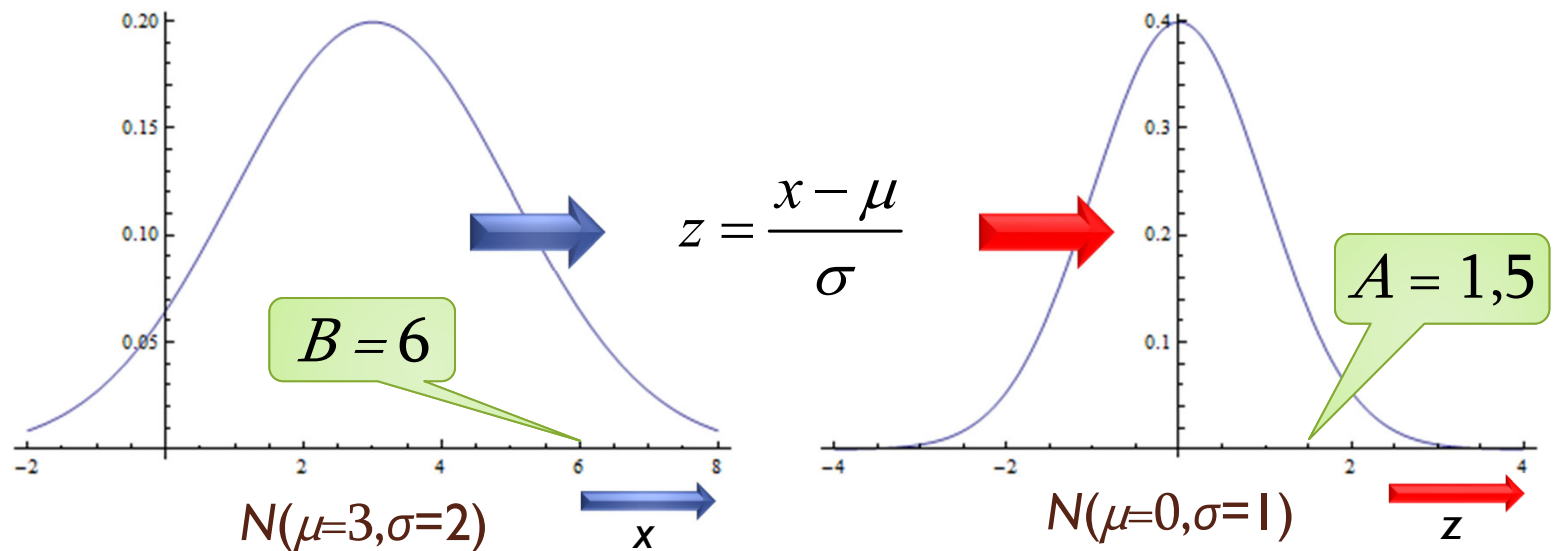
$$P(x \leq B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^B e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Distribusi Normal dengan

- Rerata = μ
- Simpangan baku = σ



Mapping $N(\mu, \sigma)$ menjadi $N(\mu=0, \sigma=1)$



- Kurva $N(\mu=3, \sigma=2)$ dengan transformasi di atas dapat diubah menjadi $N(\mu=0, \sigma=1)$
- Titik B pada kurva $N(\mu=3, \sigma=2)$ lokasinya di-mapping ke dalam kurva $N(\mu=0, \sigma=1)$ yaitu di titik A .

Analisis Frekuensi

- Andaikan suatu agihan (distribusi) data sumberdaya air sesuai dengan Distribusi Normal kurva $N(\mu, \sigma)$,
 - Tentukan nilai $P(x \leq B)$ sesuai kondisi lapangan, misal debit banjir/kekeringan dengan kala ulang tertentu ($T = 20$ tahun), atau debit andalan (97,5%). Nilai B akan dihitung.
 - Hitung titik A pada kurva $N(\mu=0, \sigma=1)$ menggunakan nilai $P(x \leq B)$ dari Butir I dengan metoda standard seperti disajikan dalam buku-buku acuan.
 - Hitung nilai sumberdaya air terkait, x dengan formula:

$$A = \frac{B - \mu}{\sigma} \quad \longrightarrow \quad B = \mu + A\sigma$$

Menghitung $Q(A)$ pada kurva $N(\mu=0, \sigma=1)$

- Menurut Abramowitz & Stegun, Handbook of Mathematical Functions, 1972, halaman 932, $Q(A)$:

$$Q(A) \doteq Q(x > A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

untuk $A \geq 0$ dapat dihitung dengan polinomial pendekatan sebagai berikut:

$$Q(A) = \frac{1}{2} (1 + 0,196854A + 0,115194A^2 + 0,000344A^3 + 0,019527A^4)^{-4}$$

Perbandingan dengan MS Excel

- Pada Kolom A & S gunakan persamaan kedua dari Abramowitz & Stegun.
- Pada Kolom MS Excel gunakan formula {1-NORMSDIST(A)}

A	Q(z>A)	
	A & S	MS Excel
-3,0000	0,9984	0,9987
-1,0000	0,8411	0,8413
0,0000	0,5000	0,5000
1,0000	0,1589	0,1587
3,0000	0,0016	0,0013

Menghitung A pada kurva $N(\mu=0, \sigma=1)$

- Menurut Abramowitz & Stegun, Handbook of Mathematical Functions, 1972, halaman 933, $Q(A)$:

$$Q(A) \doteq Q(x > A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

jika $Q(A) = p$, dengan $0 < p < 0,5$ maka A dapat dihitung formula pendekatan sbb:

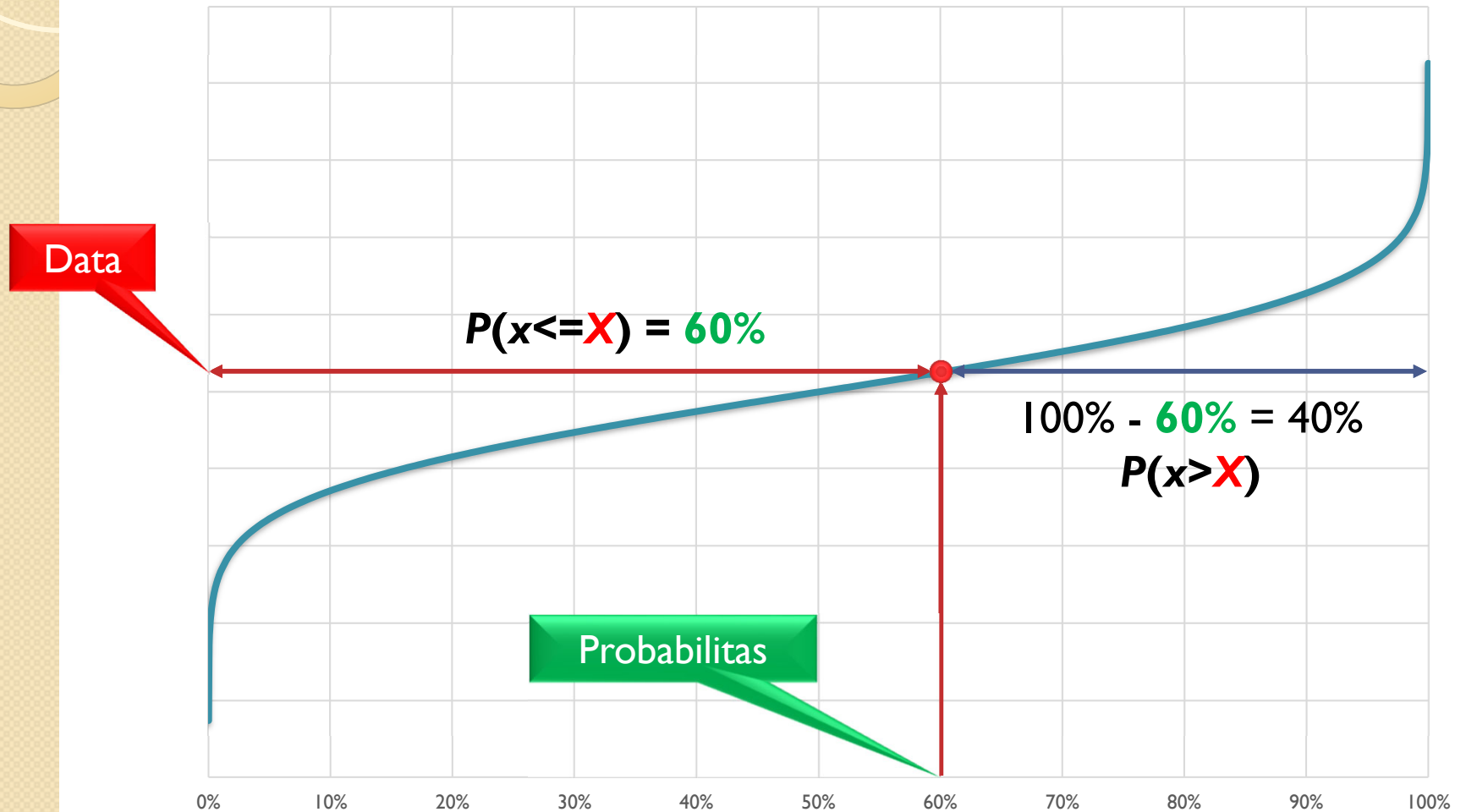
$$A = t - \frac{2,515517 + 0,802853t + 0,010328t^2}{1 + 1,432788t + 0,189269t^2 + 0,001308t^3} \text{ dengan } t = \sqrt{\ln \frac{1}{p^2}}$$

Perbandingan dengan MS Excel

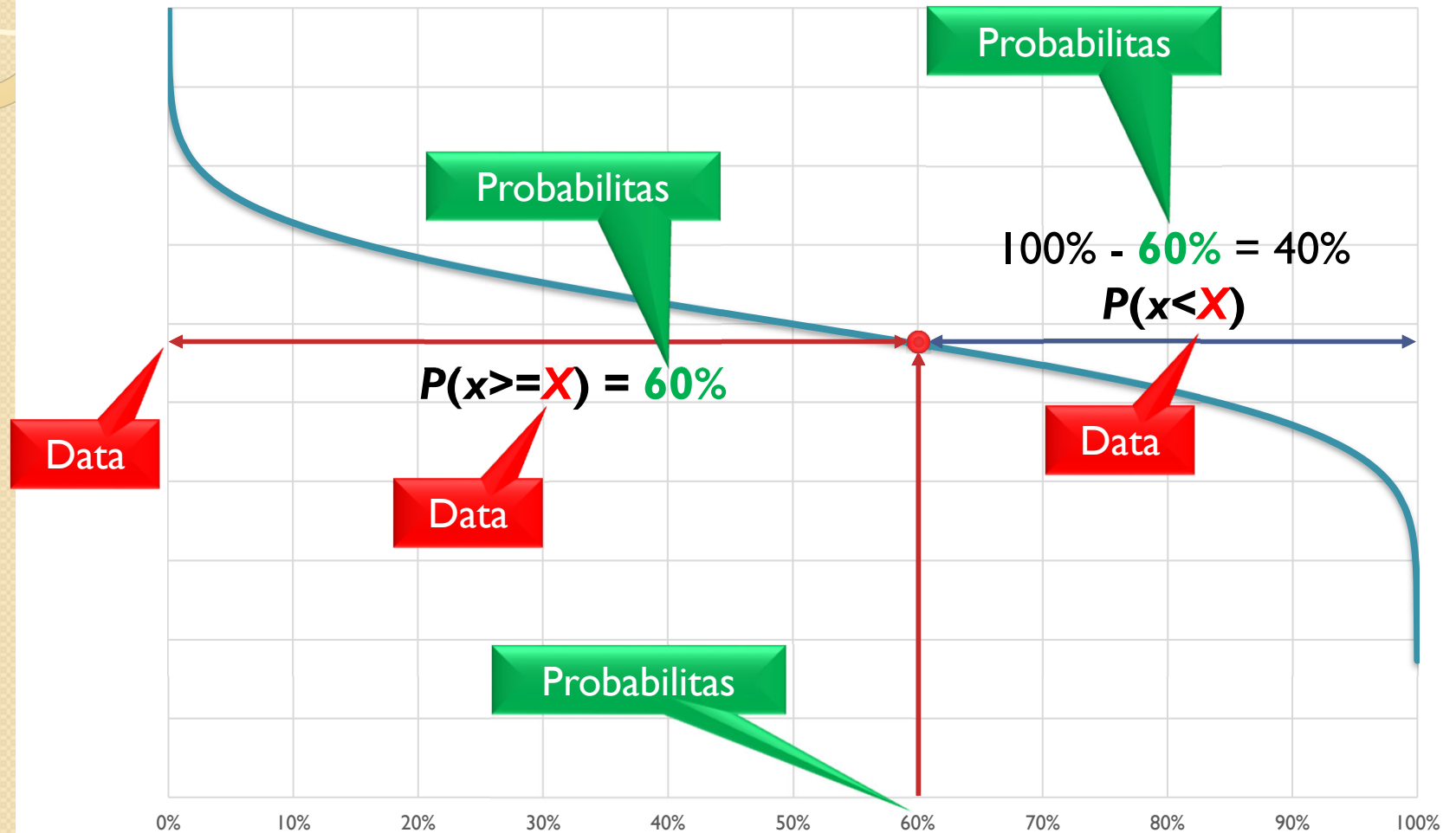
- Pada Kolom A & S gunakan persamaan pertama dari Abramowitz & Stegun.
- Pada Kolom MS Excel gunakan formula {NORMSINV(1-p)}

$p = Q(z>A)$	$t = \sqrt{\ln(1/p^2)}$	A	
		A & S	MS Excel
0,9987	3,6353	-3,0003	-3,0000
0,8413	1,9189	-1,0000	-1,0000
0,5000	1,1774	0,0000	0,0000
0,1587	1,9189	1,0000	1,0000
0,0013	3,6353	3,0003	3,0000

Kurva Distribusi Normal Kumulatif, $P(x \leq X)$

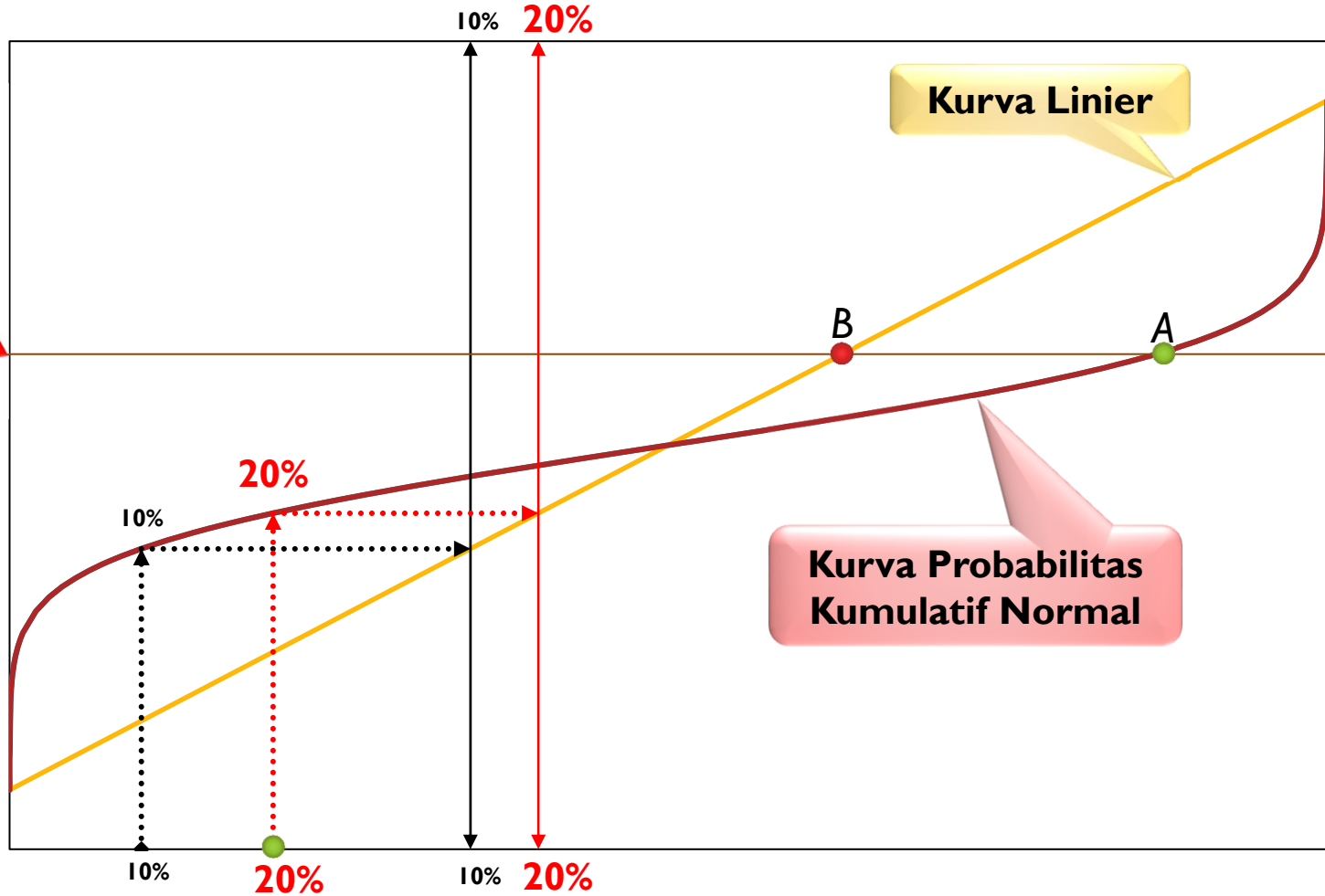


Kurva Distribusi Normal Kumulatif, $P(x \geq X)$



Kurva Distribusi Normal Kumulatif, $P(x \leq X)$ dilinierkan

Pada nilai data yang sama probabilitas asli A harus digeser ke B



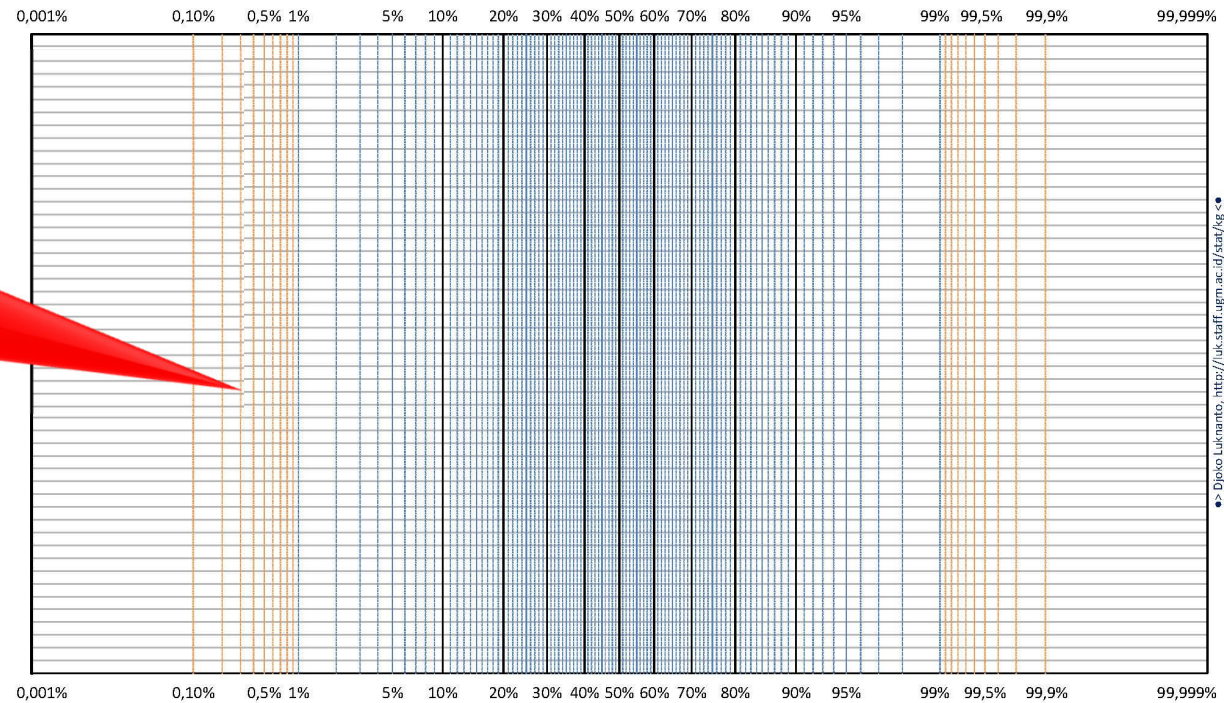
Kertas Distribusi Normal

Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan

Analisis Frekuensi

FT UGM

Pada kertas grafik distribusi Normal setiap data yang terdistribusi Normal akan menjadi lurus kurva cdf-nya



Djoko Luknanto, <http://luk.staff.ugm.ac.id/stat/>

Kertas Grafik Linier-Normal

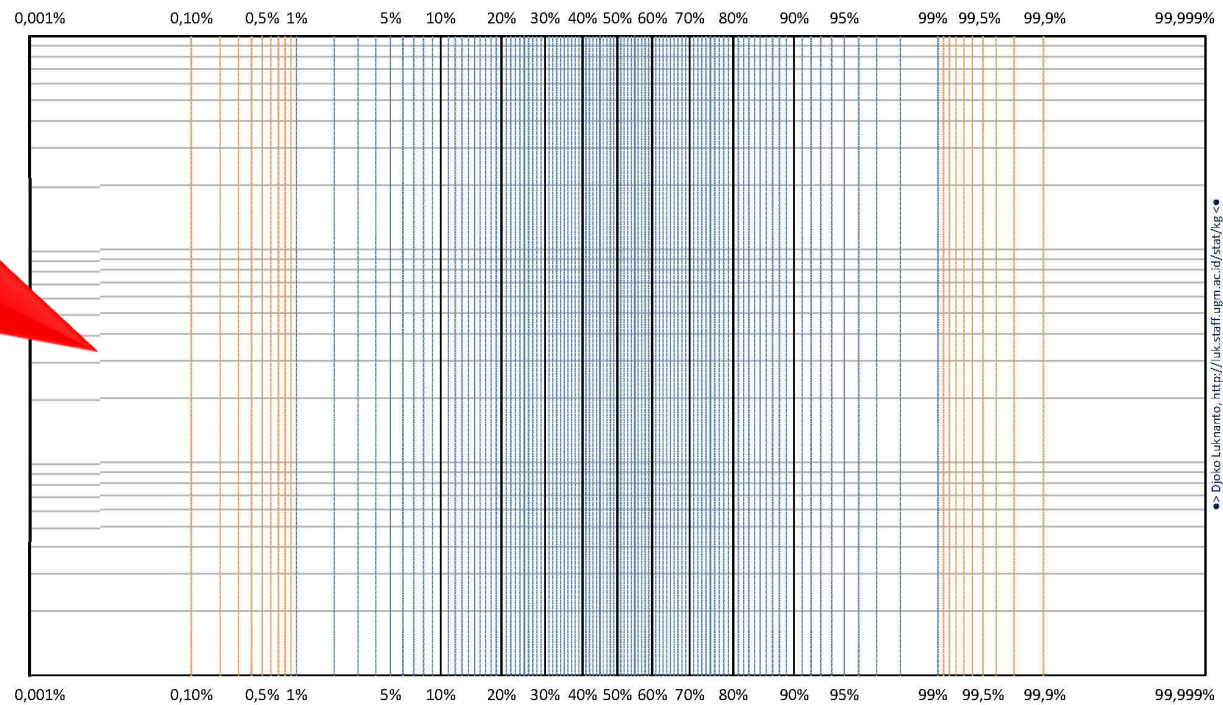
hal. 1, 06/01/2016

Kertas Distribusi Log-Normal

Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan

Analisis Frekuensi

FT UGM



Pada kertas grafik distribusi Log-Normal setiap data yang terdistribusi Log-Normal akan menjadi lurus kurva cdf-nya

Djoko Luknanto, <http://luk.staff.ugm.ac.id/stat/>

Kertas Grafik Logaritmik-Normal

hal. 1, 06/01/2016