



# **Analisis Frekuensi di bidang sumberdaya air**

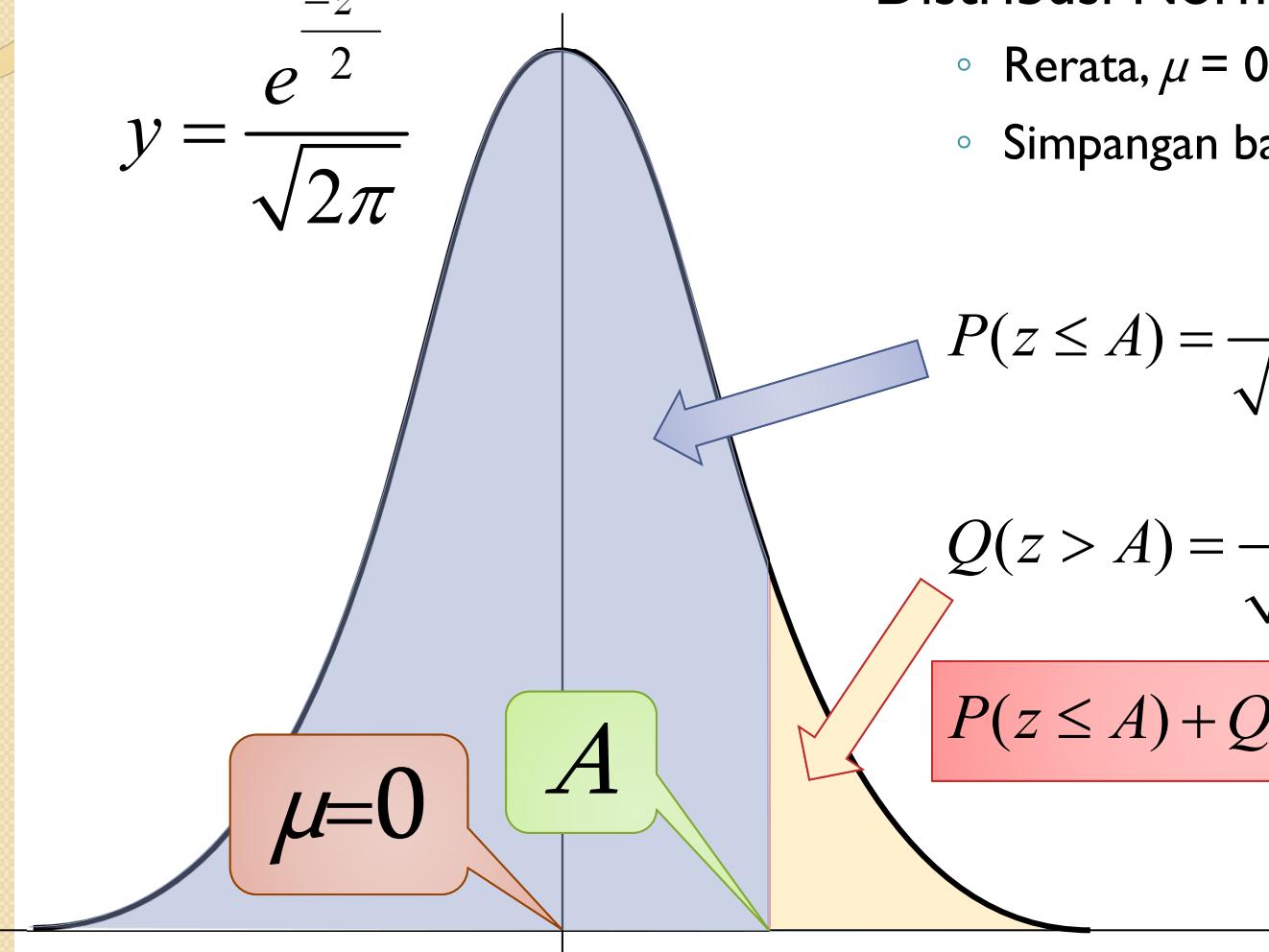
oleh

Djoko Luknanto

**Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan  
FT UGM**

# Distribusi Normal $N(\mu=0, \sigma=1)$

$$y = \frac{e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$



Distribusi Normal dengan

- Rerata,  $\mu = 0$
- Simpangan baku,  $\sigma = 1$

$$P(z \leq A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^A e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

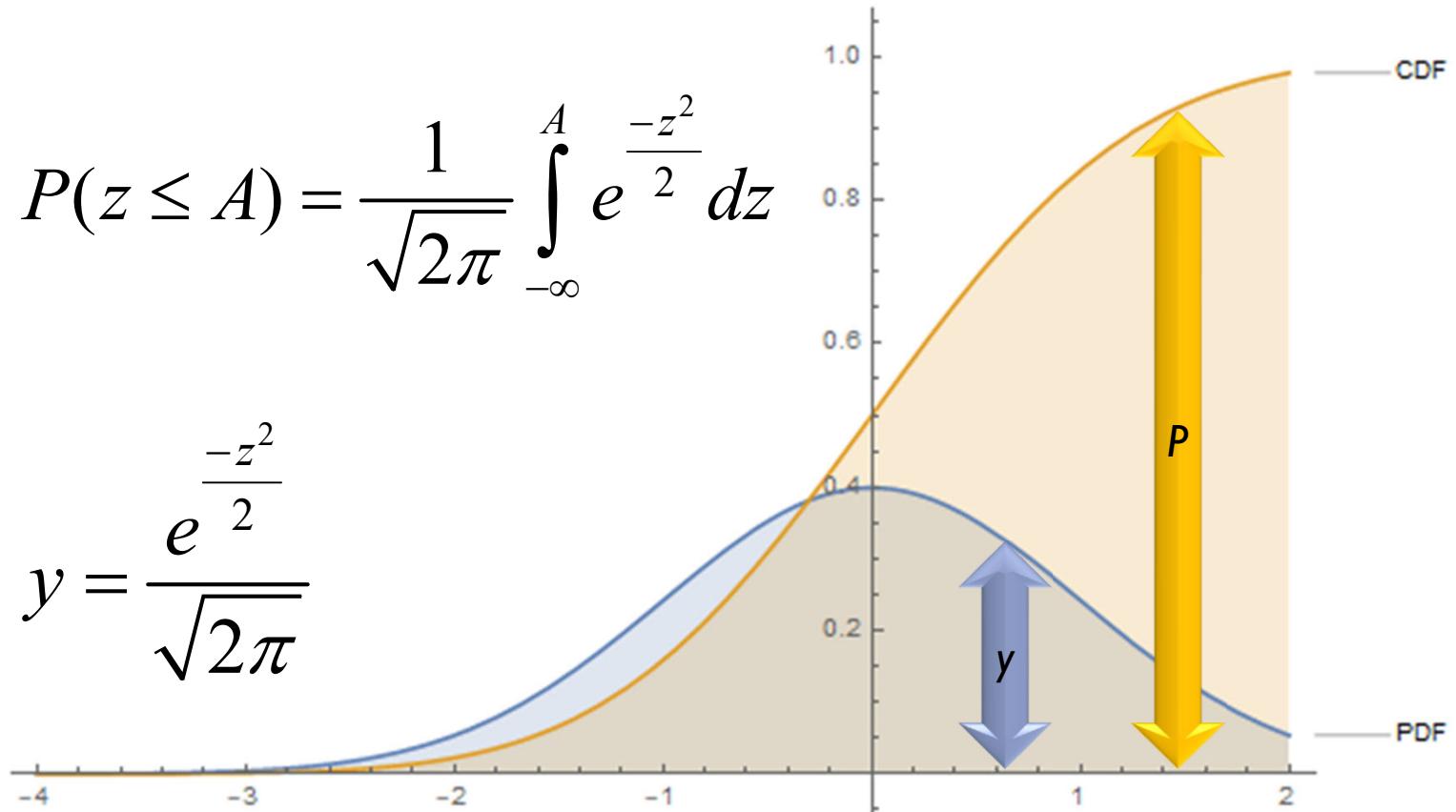
$$Q(z > A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^{\infty} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

# PDF dan CDF

## Distribusi Normal $N(\mu=0, \sigma=1)$

$$P(z \leq A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^A e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

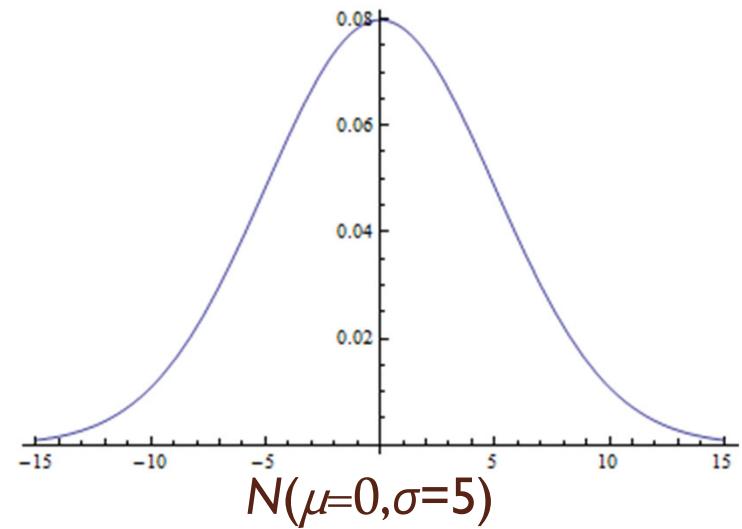
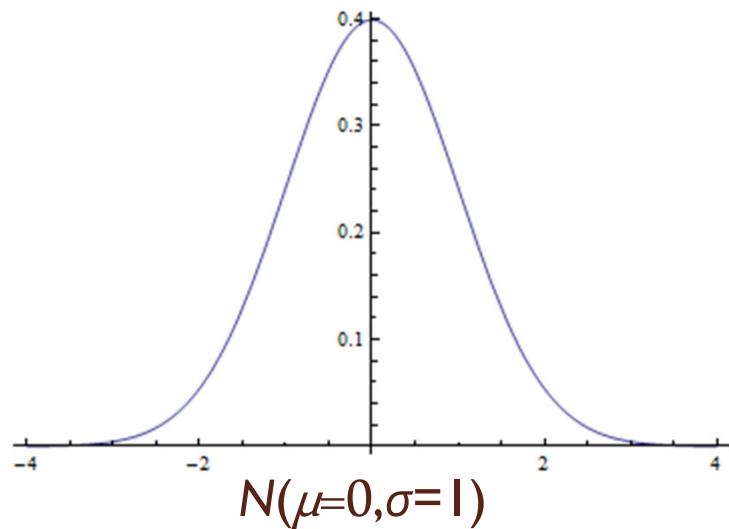
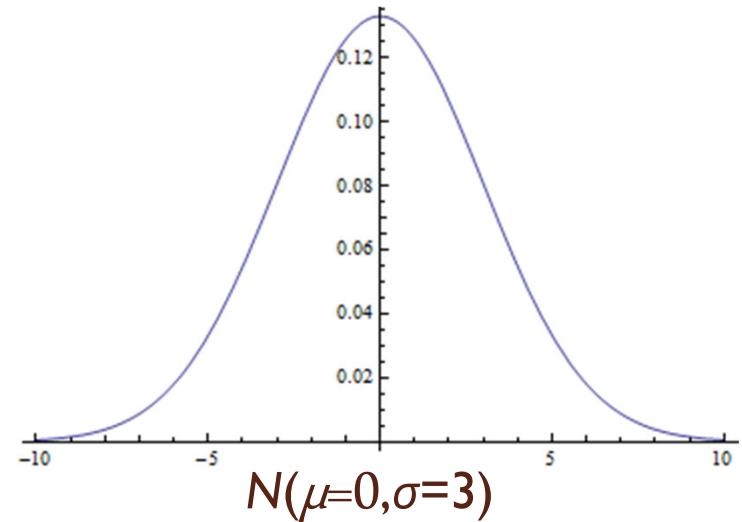
$$y = \frac{e^{\frac{-z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$



# Distribusi Normal $N(\mu=0,\sigma)$

Distribusi Normal dengan

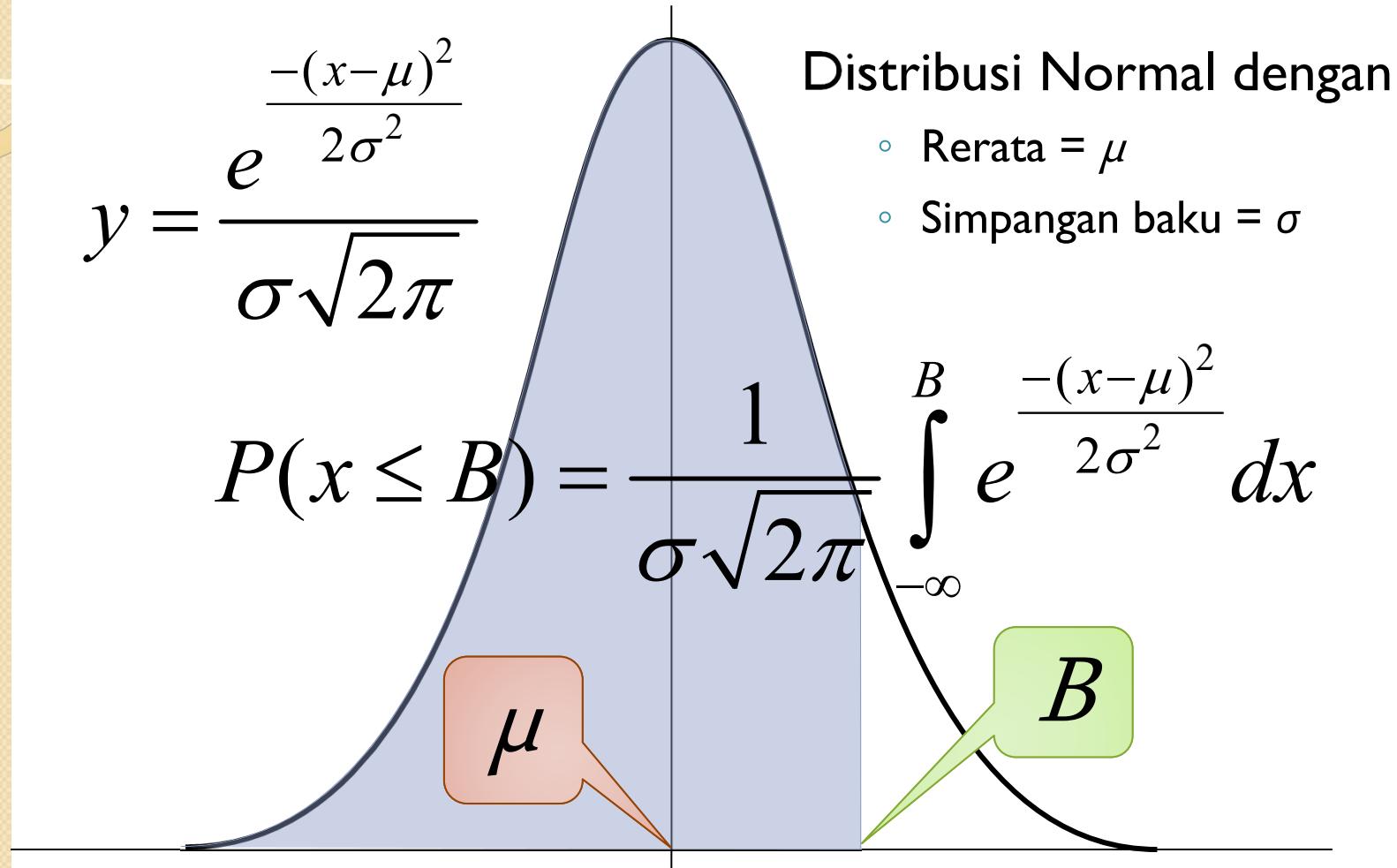
- Rerata,  $\mu = 0$
- Simpangan baku,  $\sigma = 1$
- Simpangan baku,  $\sigma = 3$
- Simpangan baku,  $\sigma = 5$



# Distribusi Normal $N(\mu, \sigma)$

$$y = \frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$P(x \leq B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^B e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$



# Tabel PDF dan CDF: Distribusi Normal $N(\mu=0, \sigma=1)$

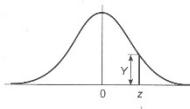
Setiap distribusi memiliki tabel PDF dan CDF semacam ini

$$\text{PDF: } y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

Statistik, Murray R. Spiegel & Larry J. Stephens, Schaum's Outline, Edisi Ketiga.

Lampiran I

Ordinat ( $y$ )  
dari  
Kurva Normal  
Standar  
pada  $z$



$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3663	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1668	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0504	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Nilai  $z = A$

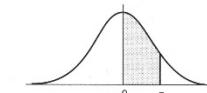
Nilai  $y$

$$\text{CDF: } P(z \leq A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^A e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

Statistik, Murray R. Spiegel & Larry J. Stephens, Schaum's Outline, Edisi Ketiga.

Lampiran II

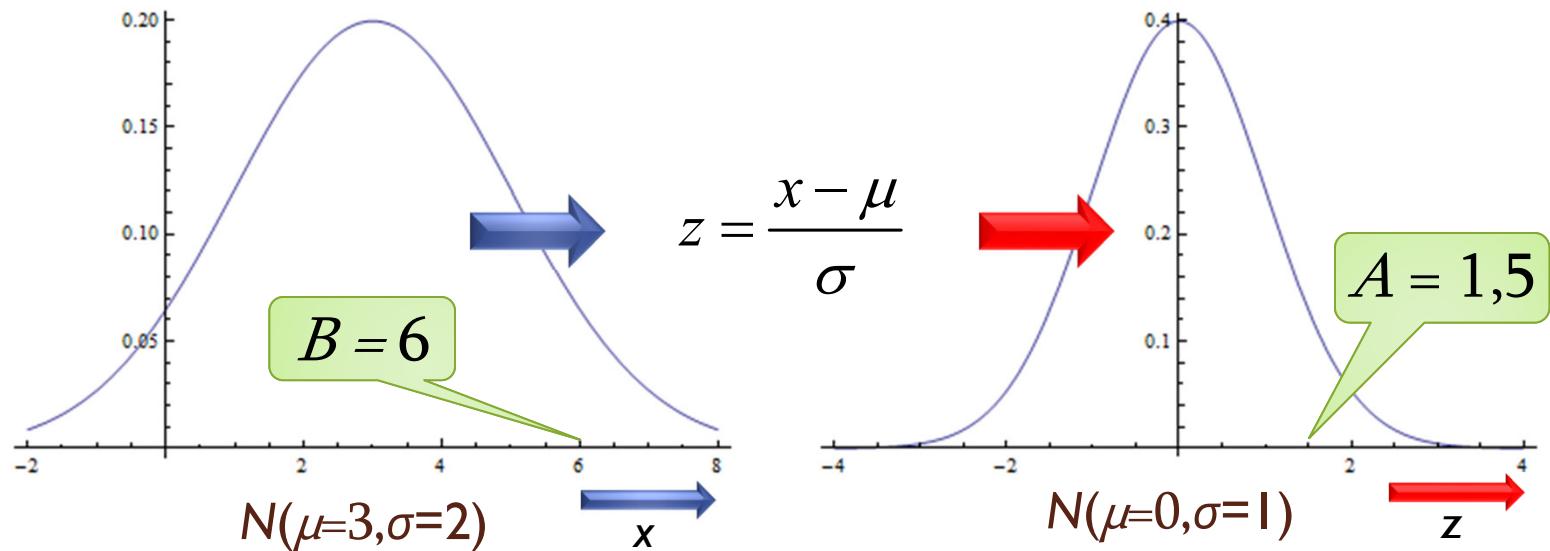
Luas Daerah  
di Bawah  
Kurva Normal  
Standar  
dari 0 sampai  $z$



$z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0190	0,0230	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0754
0,2	0,0710	0,0832	0,0871	0,0979	0,1217	0,1255	0,1474	0,1643	0,1480	0,1517
0,3	0,1217	0,1519	0,1628	0,1664	0,1700	0,1738	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1738	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,2258	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2518	0,2549
0,6	0,2580	0,2612	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,7	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2996	0,3023	0,3051	0,3078	0,3133	0,3183
0,8	0,3159	0,3184	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
0,9	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3609	0,3621
1,0	0,3643	0,3665	0,3686	0,3707	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,1	0,3849	0,3869	0,3888	0,3905	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,4007	0,4015
1,2	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,3	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4250	0,4263	0,4276	0,4288	0,4306	0,4319
1,4	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4383	0,4394	0,4405	0,4417	0,4429	0,4441
1,5	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4494	0,4503	0,4513	0,4523	0,4535	0,4545
1,6	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4617	0,4625	0,4633
1,7	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,8	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
1,9	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,0	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,1	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,2	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,3	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936

	Nilai $z = A$	Nilai $P(z \leq A)$
3,0	0,4987	0,4987
3,1	0,4990	0,4991
3,2	0,4993	0,4993
3,3	0,4995	0,4995
3,4	0,4997	0,4997
3,5	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4999
3,7	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000

# Mapping $N(\mu,\sigma)$ menjadi $N(\mu=0,\sigma=1)$



- Kurva  $N(\mu=3, \sigma=2)$  dengan transformasi di atas dapat diubah menjadi  $N(\mu=0, \sigma=1)$
- Titik  $B$  pada kurva  $N(\mu=3, \sigma=2)$  lokasinya di-*mapping* ke dalam kurva  $N(\mu=0, \sigma=1)$  yaitu di titik  $A$ .

# Analisis Frekuensi

- Andaikan suatu agihan (distribusi) data sumberdaya air sesuai dengan Distribusi Normal kurva  $N(\mu, \sigma)$ ,
  - Tentukan nilai  $P(x \leq B)$  sesuai kondisi lapangan, misal debit banjir/kekeringan dengan kala ulang tertentu ( $T = 20$  tahun), atau debit andalan (97,5%). Nilai  $B$  akan dihitung.
  - Hitung titik  $A$  pada kurva  $N(\mu=0, \sigma=1)$  menggunakan nilai  $P(x \leq B)$  dari Butir I dengan metoda standard seperti disajikan dalam buku-buku acuan.
  - Hitung nilai sumberdaya air terkait,  $x$  dengan formula:

$$A = \frac{B - \mu}{\sigma} \quad \rightarrow \quad B = \mu + A\sigma$$

## Menghitung $Q(A)$ pada kurva $N(\mu=0, \sigma=1)$

- Menurut Abramowitz & Stegun,  
Handbook of Mathematical Functions,  
1972, halaman 932,  $Q(A)$ :

$$Q(A) \doteq Q(x > A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

untuk  $A \geq 0$  dapat dihitung dengan  
polinomial pendekatan sebagai berikut:

$$Q(A) = \frac{1}{2} (1 + 0,196854A + 0,115194A^2 + 0,000344A^3 + 0,019527A^4)^{-4}$$

# Perbandingan dengan MS Excel

- Pada Kolom A & S gunakan persamaan kedua dari Abramowitz & Stegun.
- Pada Kolom MS Excel gunakan formula {1-NORMSDIST(A)}

A	$Q(z>A)$	
	A & S	MS Excel
-3,0000	0,9984	0,9987
-1,0000	0,8411	0,8413
0,0000	0,5000	0,5000
1,0000	0,1589	0,1587
3,0000	0,0016	0,0013

## Menghitung $A$ pada kurva $N(\mu=0, \sigma=1)$

- Menurut Abramowitz & Stegun,  
Handbook of Mathematical Functions,  
1972, halaman 933,  $Q(A)$ :

$$Q(A) \doteq Q(x > A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$$

jika  $Q(A) = p$ , dengan  $0 < p < 0,5$  maka  $A$  dapat dihitung formula pendekatan sbb:

$$A = t - \frac{2,515517 + 0,802853t + 0,010328t^2}{1 + 1,432788t + 0,189269t^2 + 0,001308t^3} \text{ dengan } t = \sqrt{\ln \frac{1}{p^2}}$$

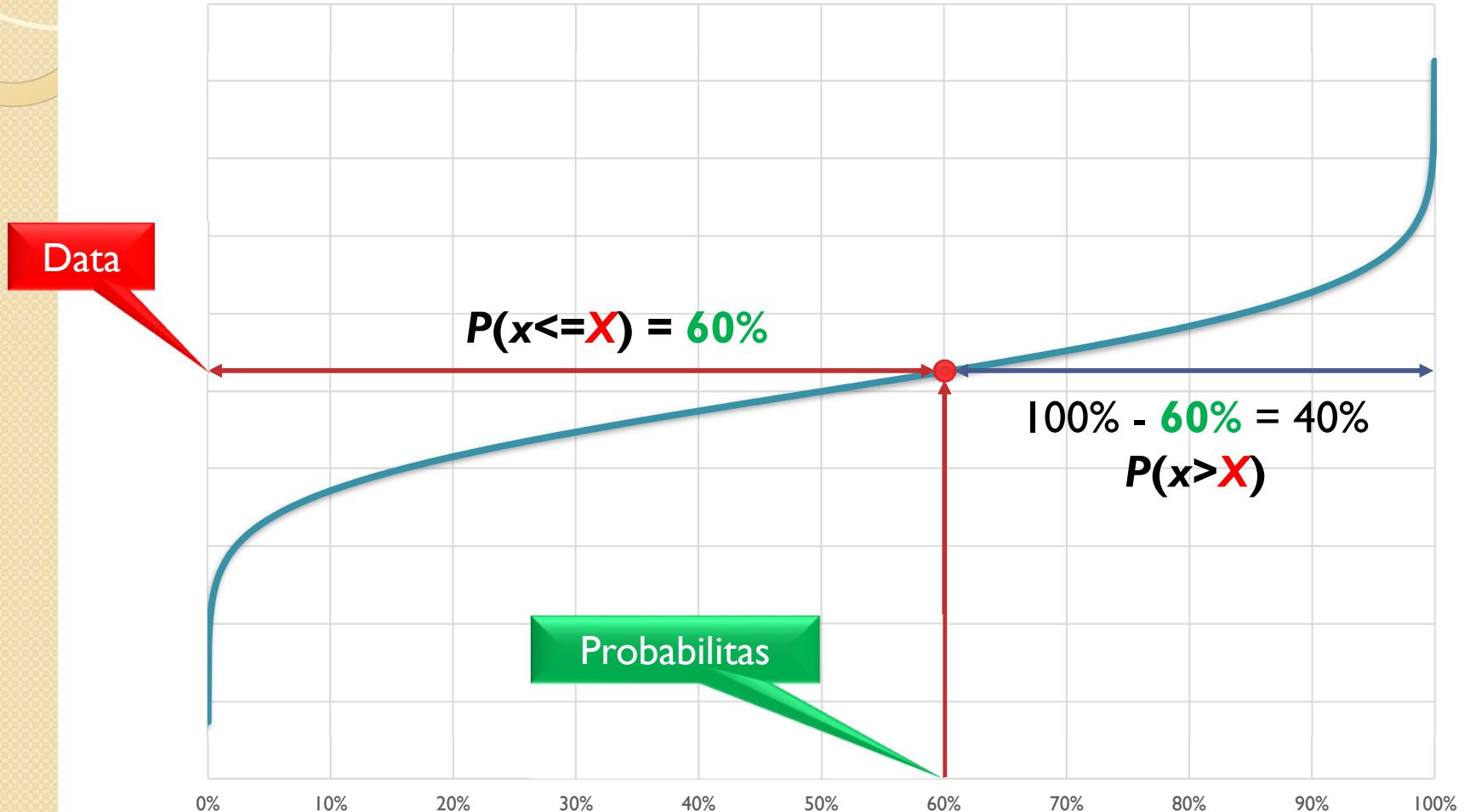
# Perbandingan dengan MS Excel

- Pada Kolom A & S gunakan persamaan pertama dari Abramowitz & Stegun.
- Pada Kolom MS Excel gunakan formula {NORMSINV(1-p)}

$p = Q(z>A)$	$t = \sqrt{\ln(1/p^2)}$	A	
		A & S	MS Excel
0,9987	3,6353	-3,0003	-3,0000
0,8413	1,9189	-1,0000	-1,0000
0,5000	1,1774	0,0000	0,0000
0,1587	1,9189	1,0000	1,0000
0,0013	3,6353	3,0003	3,0000

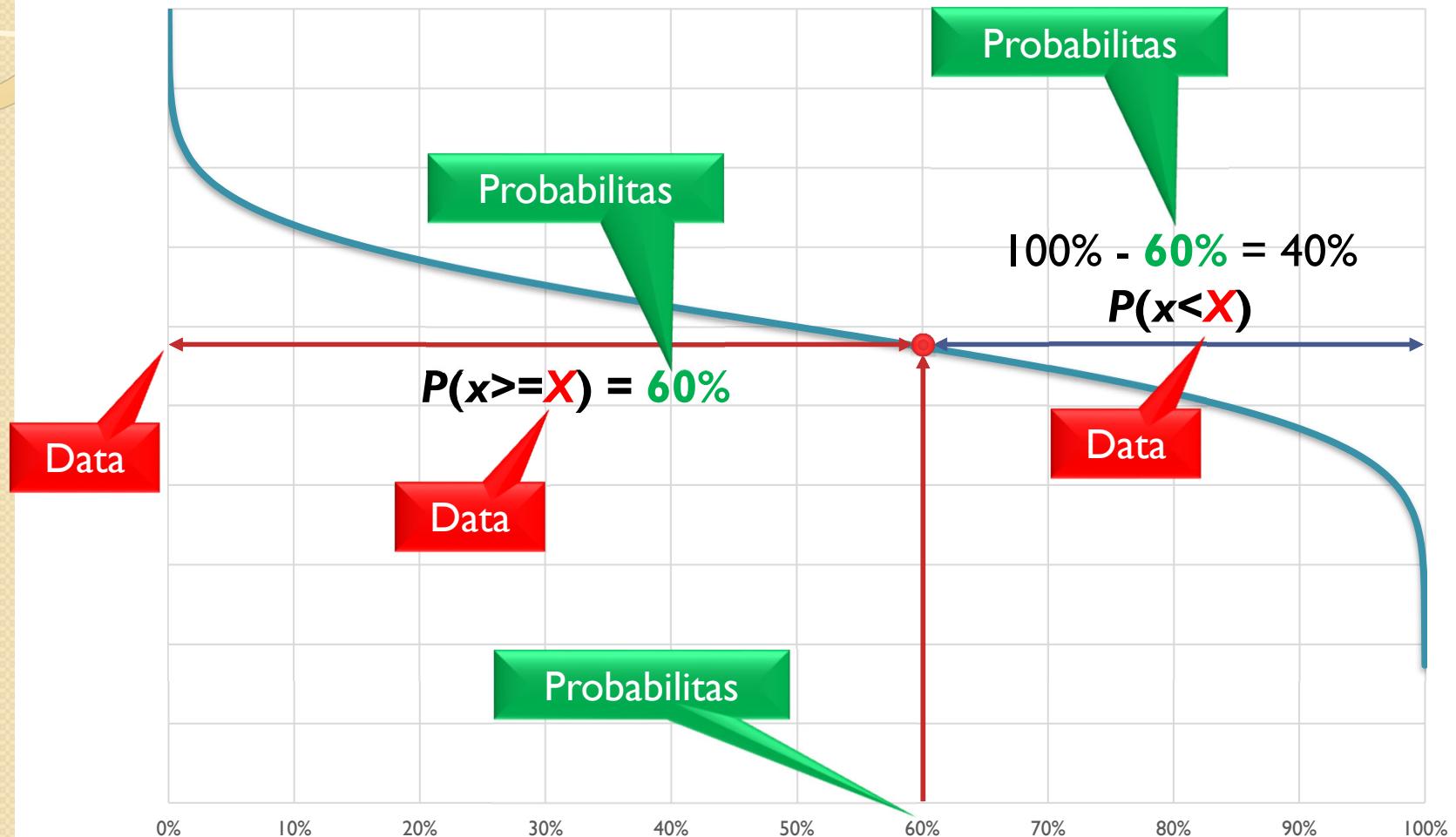
# Kurva Distribusi Normal

## Kumulatif, $P(x \leq X)$



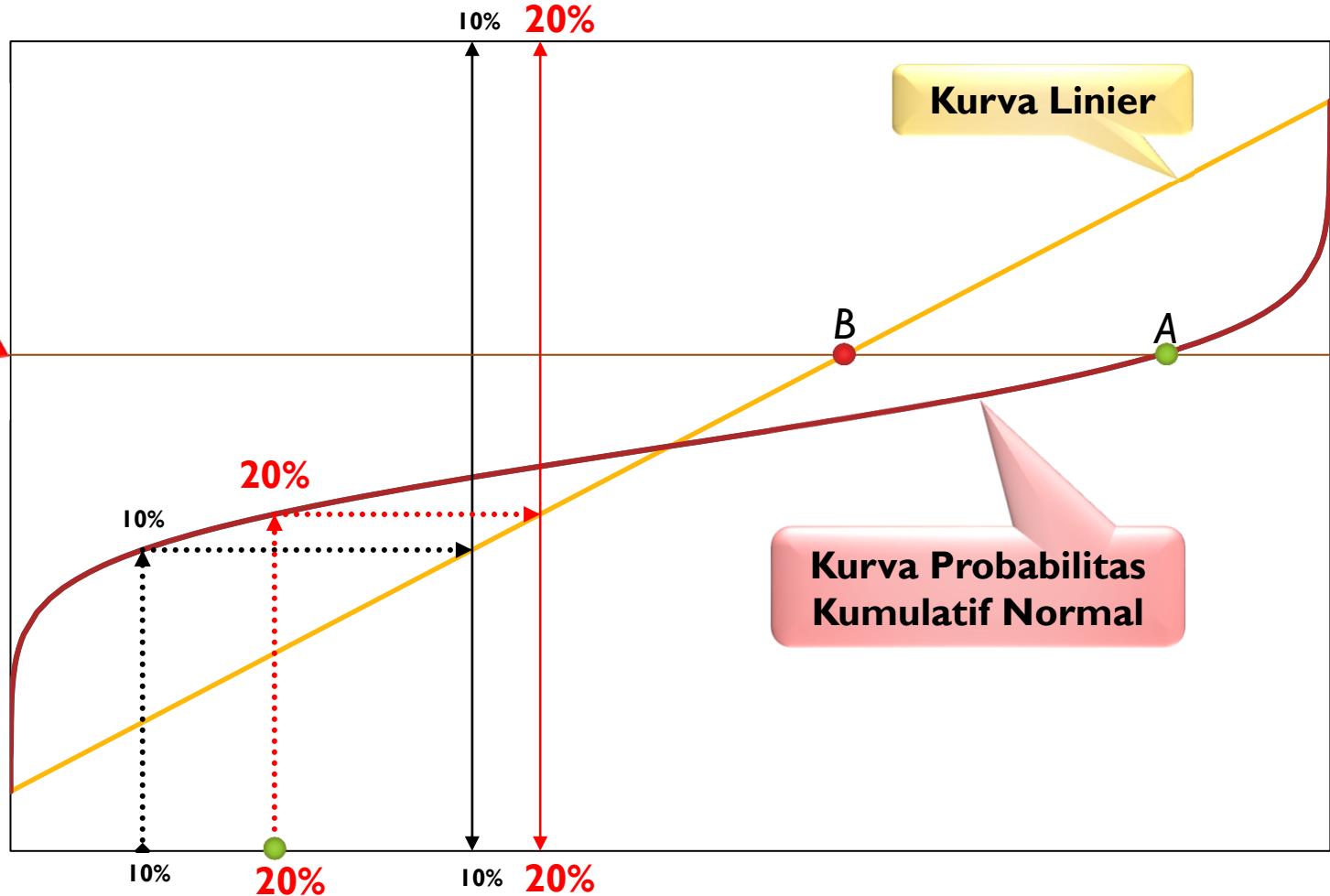
# Kurva Distribusi Normal

## Kumulatif, $P(x \geq X)$



# Kurva Distribusi Normal Kumulatif, $P(x \leq X)$ dilinierkan

Pada nilai data yang sama probabilitas asli A harus digeser ke B



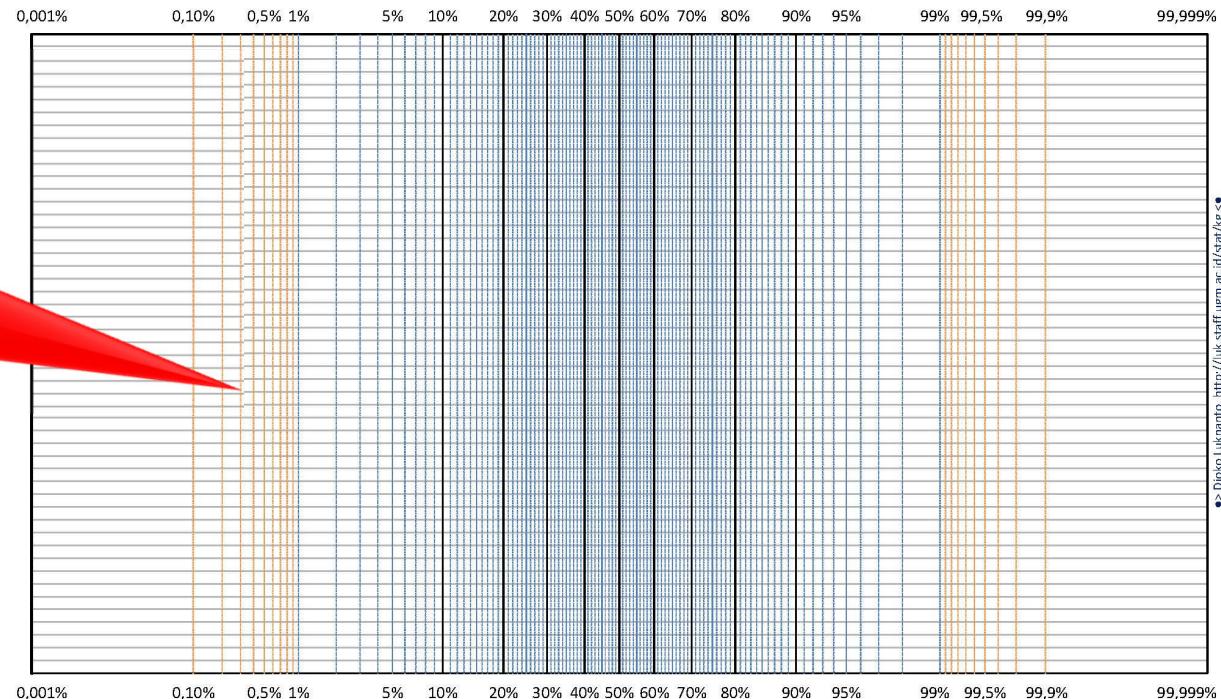
# Kertas Distribusi Normal

Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan

Analisis Frekuensi

FT UGM

Pada kertas grafik distribusi Normal setiap data yang terdistribusi Normal akan menjadi lurus kurva cdf-nya



•> Djoko Luknanto, <http://luk.staff.ugm.ac.id/stat/> <•

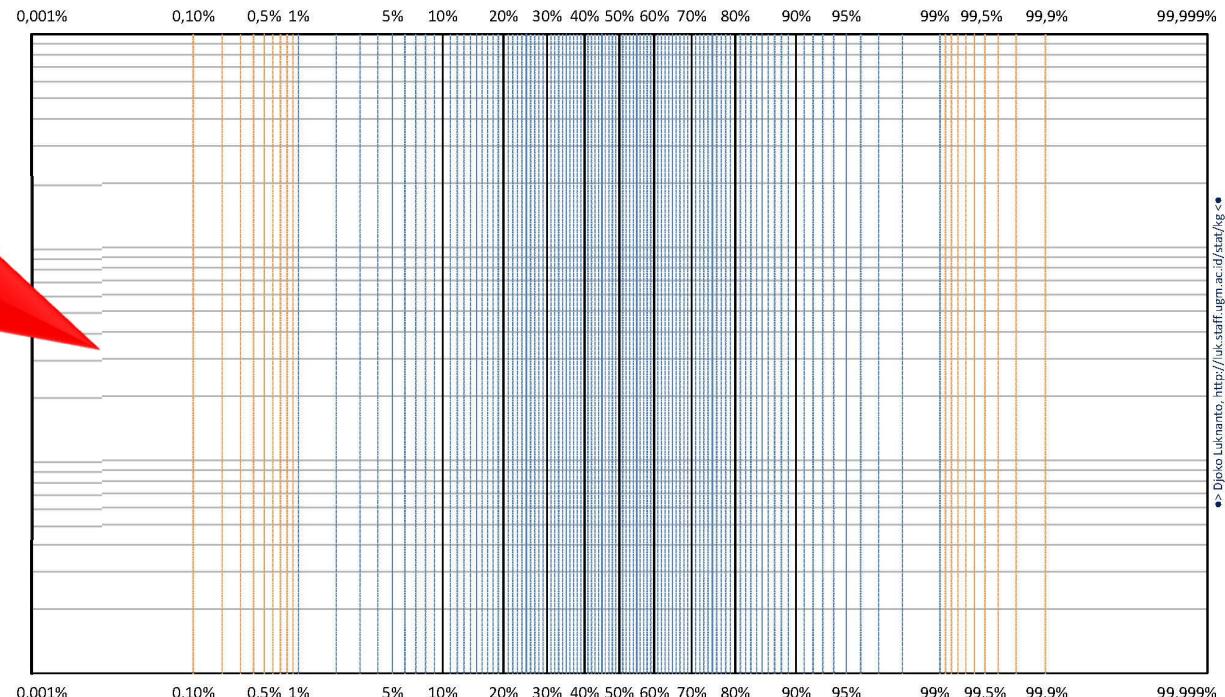
# Kertas Distribusi Log-Normal

Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan

Analisis Frekuensi

FT UGM

Pada kertas grafik distribusi Log-Normal setiap data yang terdistribusi Log-Normal akan menjadi lurus kurva cdf-nya



•> Djoko Luknanto, <http://luk.staff.ugm.ac.id/stat/kg/> ◆