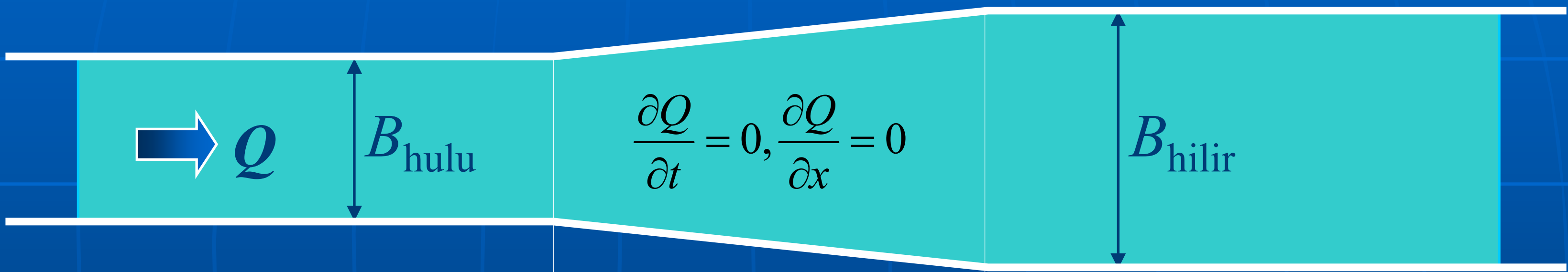
Model Matematika

Persamaan Adveksi Murni

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
Dosen Jurusan Teknik Sipil, FT UGM

… refreshing our memory …

- Suatu saluran pipa dengan *Q* konstan:



$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0, \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \frac{\partial V}{\partial x} \neq 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{dV}{dt} = 0 \qquad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} \neq 0 \qquad \frac{dV}{dt} = 0$$

- Derivatif total $\frac{d\,?}{dt} = \frac{\partial\,?}{\partial t} + \frac{\partial\,?}{\partial x}\frac{dx}{dt}$

Derivatif Total

$$\frac{d\,?}{dt} = \frac{\partial ?}{\partial t} + \frac{\partial ?}{\partial x}\frac{dx}{dt} \quad \text{atau} \quad \frac{D\,?}{Dt} = \frac{\partial ?}{\partial t} + \frac{\partial ?}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

- Perubahan total suatu variabel terhadap waktu dipengaruhi oleh:
  - perubahan variabel terhadap waktu
  - perubahan variabel terhadap ruang dikalikan dengan kecepatan perubahan tersebut ditransmisikan

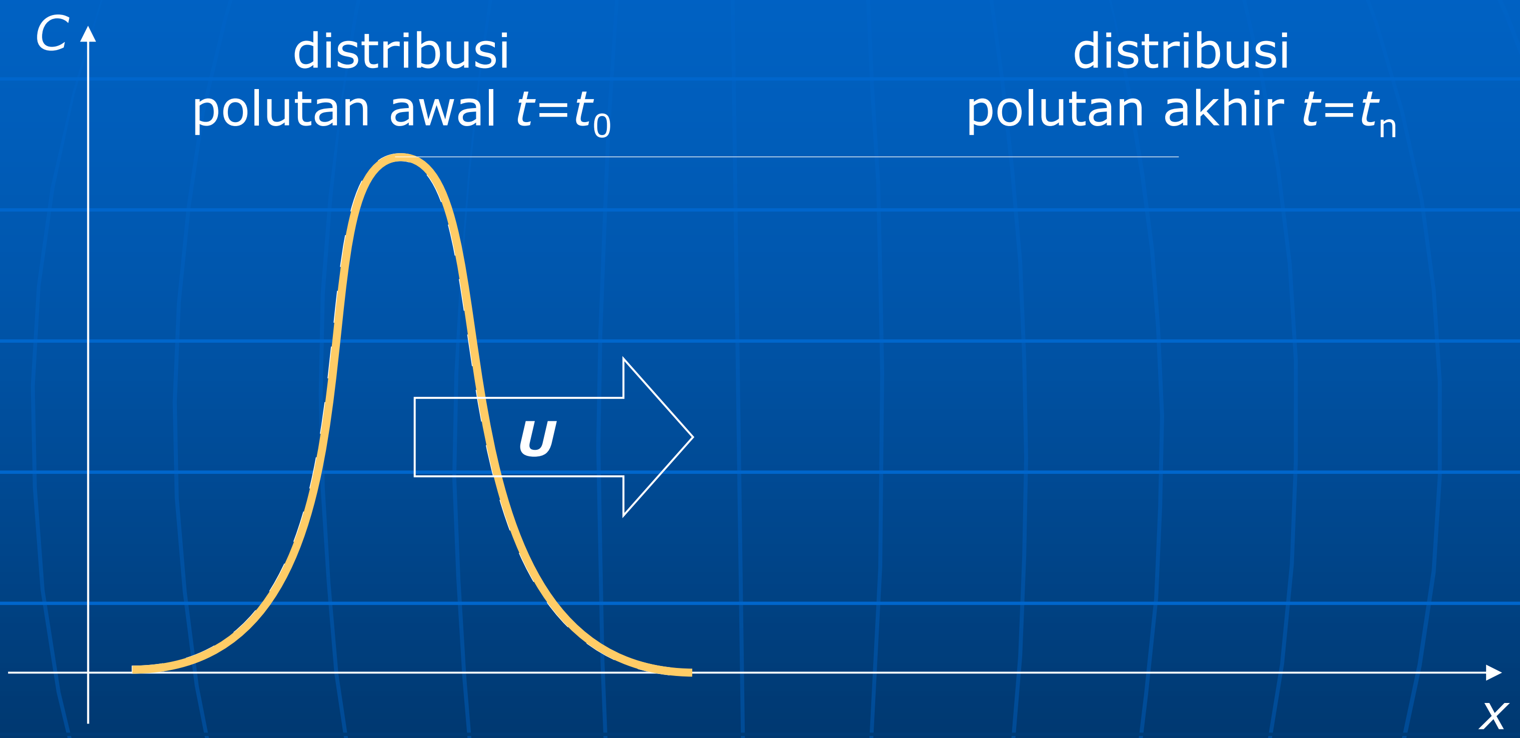
Persamaan Dasar

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

- *C*, konsentrasi polutan
  U, kecepatan aliran
  t, waktu
  x, ruang, lokasi

- Persamaan diferensial parsial diatas diselesaikan dengan dua persamaan diferensial biasa, sehingga mudah diintegrasikan

Interpretasi Persamaan Adveksi



- Karena adveksi murni, maka distribusi polutan hanya bergerak karena pengaruh kecepatan aliran sebesar *U*, sedangkan bentuk distribusi konsentrasinya harus tetap.

Metoda Karakteristik

- Jika $\frac{dx}{dt} = U$ maka $\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = 0$

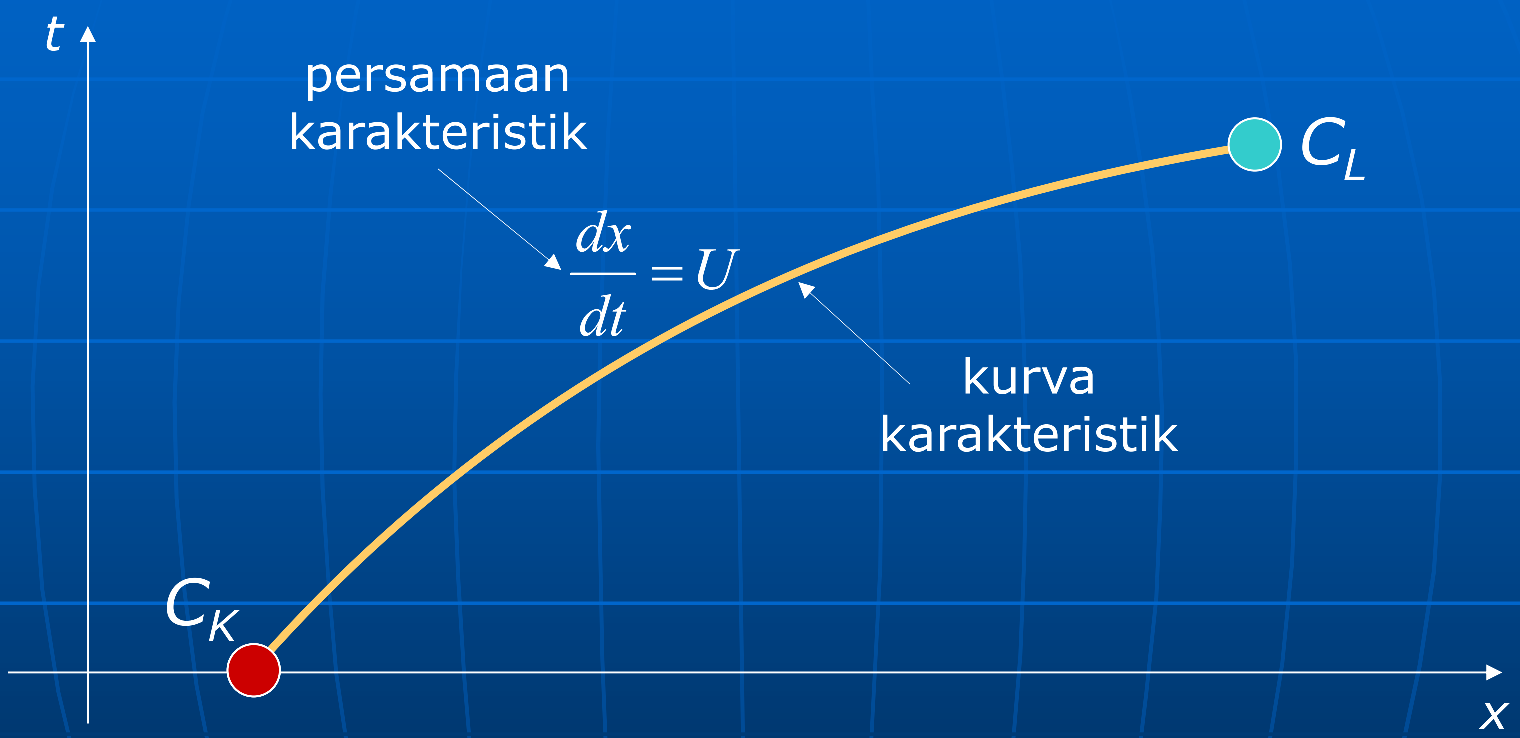
  dapat ditulis sebagai $\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial C}{\partial x} = 0$

  dan akhirnya dapat dikenali sebagai $\frac{dC}{dt} = 0$

- Cara diatas disebut penyelesaian dengan metoda karakteristik

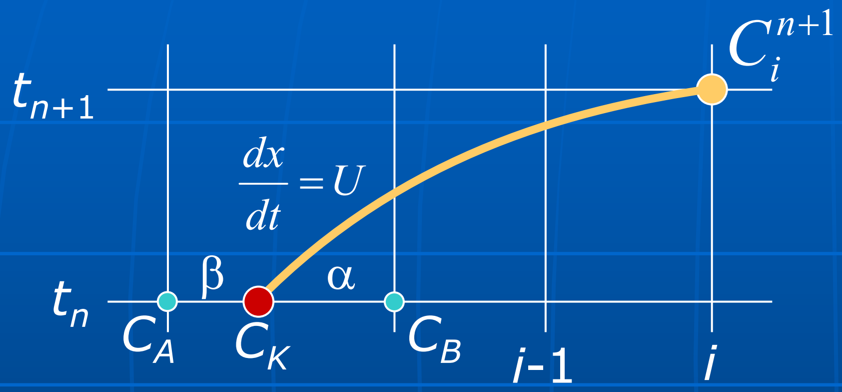
$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = 0} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = U} \text{ dan } \boxed{\frac{dC}{dt} = 0}$$

Interpretasi Umum



- $C_L = C_K$ karena $\frac{dC}{dt} = 0$

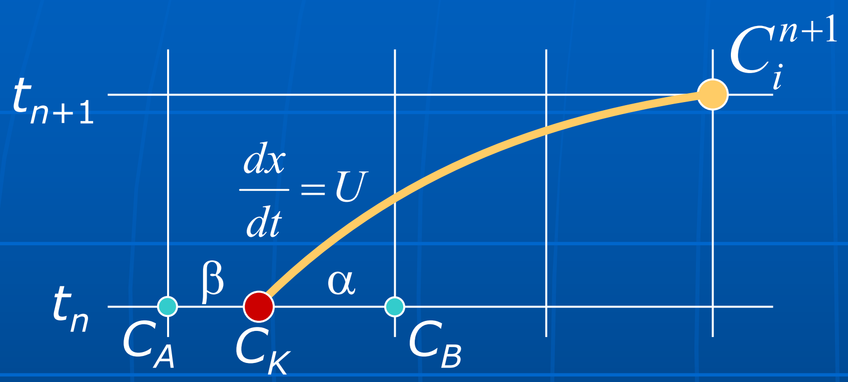
Interpretasi dlm kisi beda hingga



- $C_{i,n+1} = C_K$ karena berada dalam satu kurva karakteristik
- Sampai dengan langkah ini, belum dilakukan pendekatan numerik apapun!

- Jika mungkin *dx/dt=U* dihitung secara analitis, jika tidak maka metoda numerik digunakan
- C_K dihitung dengan pelbagai macam pendekatan:
  - interpolasi linier
  - interpolasi Hermite

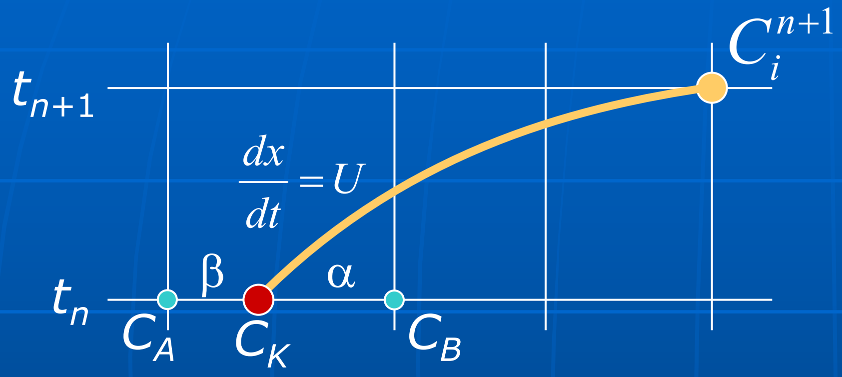
Karakteristik Interpolasi Linier



$$C_i^{n+1} = C_K$$
$$= \alpha C_A + \beta C_B$$
$$\alpha = \mathrm{frac}(Cr)$$
$$\beta = 1 - \alpha$$
$$Cr = \frac{U\Delta t}{\Delta x}$$

- $C_{i,n+1} = C_K$
- C_K dihitung interpolasi linier
- Penggunaan interpolasi linier inilah disebut pendekatan numerik dari C_K

Karakteristik Interpolasi Hermite



$$C_K = y(\alpha) = A\alpha^3 + C\alpha^2 + D\alpha + E$$

$$\alpha = \frac{x_K - x_B}{\Delta x} = \frac{U\Delta t - k\Delta x}{\Delta x} = Cr - k$$

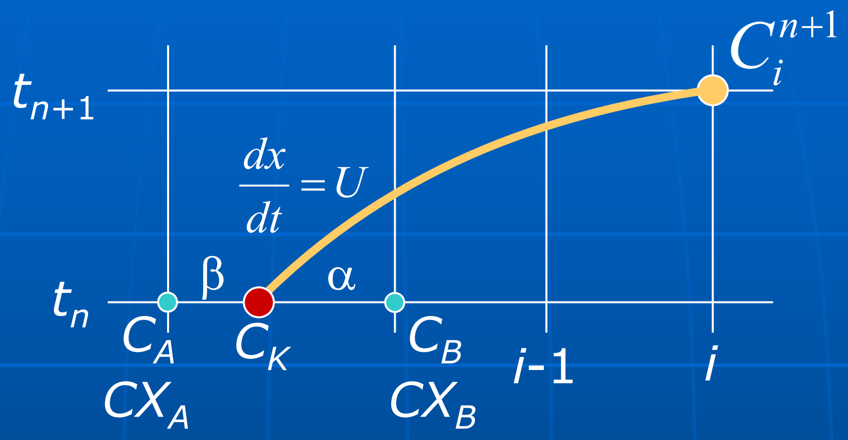
$$Cr = \frac{U\Delta t}{\Delta x}$$

$$y(0) = C_B,\ y(1) = C_A$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{\alpha=0} = CX_B,\ \left.\frac{dy}{dx}\right]_{\alpha=1} = CX_A$$

- $C_{i,n+1} = C_K$
- C_K dihitung interpolasi Hermite
- Penggunaan interpolasi Hermite inilah disebut pendekatan numerik dari C_K

Visualisasi interpolasi linier dan Hermite



- Interpolasi Linier hanya membutuhkan 2 data:
  - C_A dan C_B
- Interpolasi Hermite membutuhkan 4 data:
  - C_A dan C_B
  - CX_A dan CX_B

Kurva Linier vs Hermite