

Hidraulika Komputasi

Skema Eksplisit dan Implisit

Ir. Djoko Luknanto, M.Sc., Ph.D.
Departemen Teknik Sipil dan Lingkungan
Fakultas Teknik Universitas Gadjah Mada

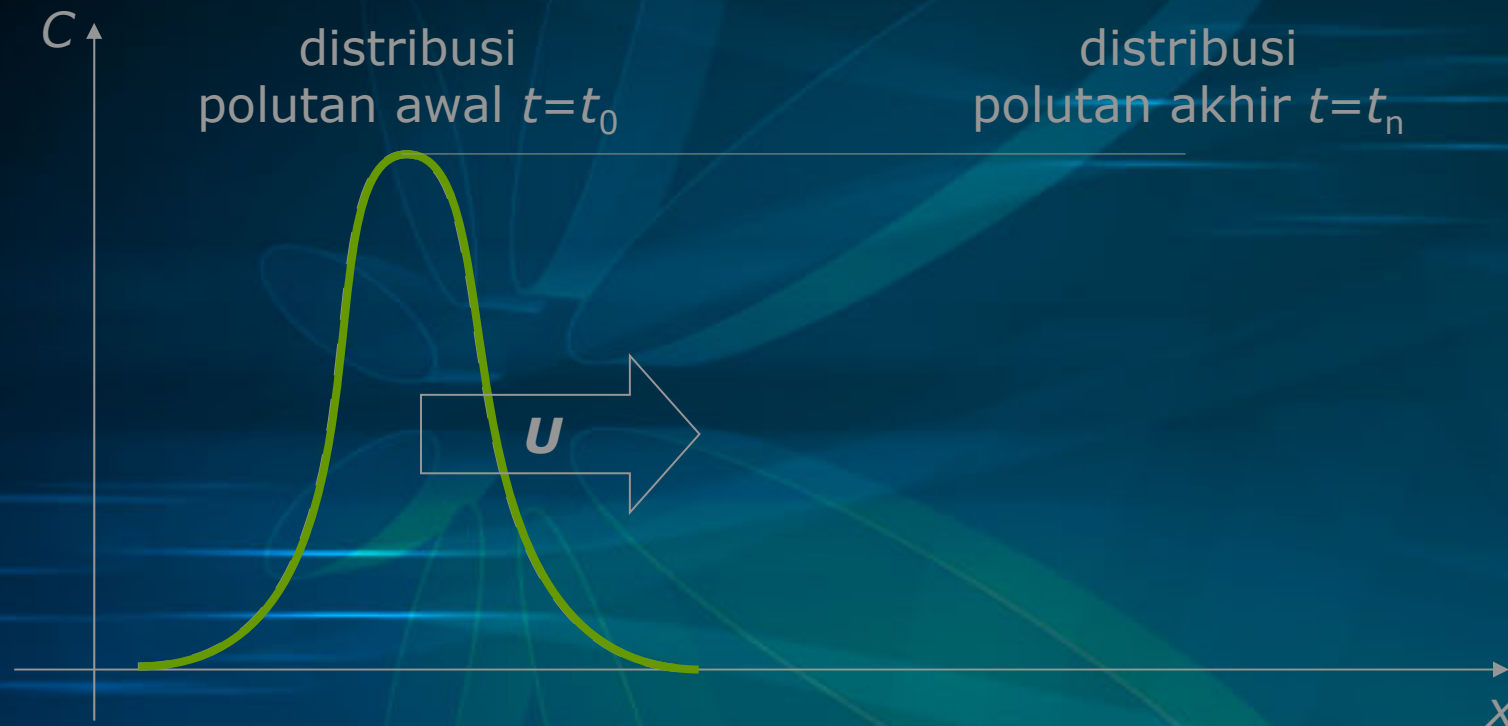
Persamaan Dasar

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

- C , konsentrasi polutan
 U , kecepatan aliran
 t , waktu
 x , ruang, lokasi

- Persamaan diferensial parsial diatas diselesaikan dengan metoda beda hingga skema maju dan mundur.

Interpretasi Persamaan Adveksi



- Karena adveksi murni, maka distribusi polutan hanya bergerak karena pengaruh kecepatan aliran sebesar U , sedangkan bentuk distribusi konsentrasinya harus tetap.

Aplikasi Skema Maju - Eksplisit

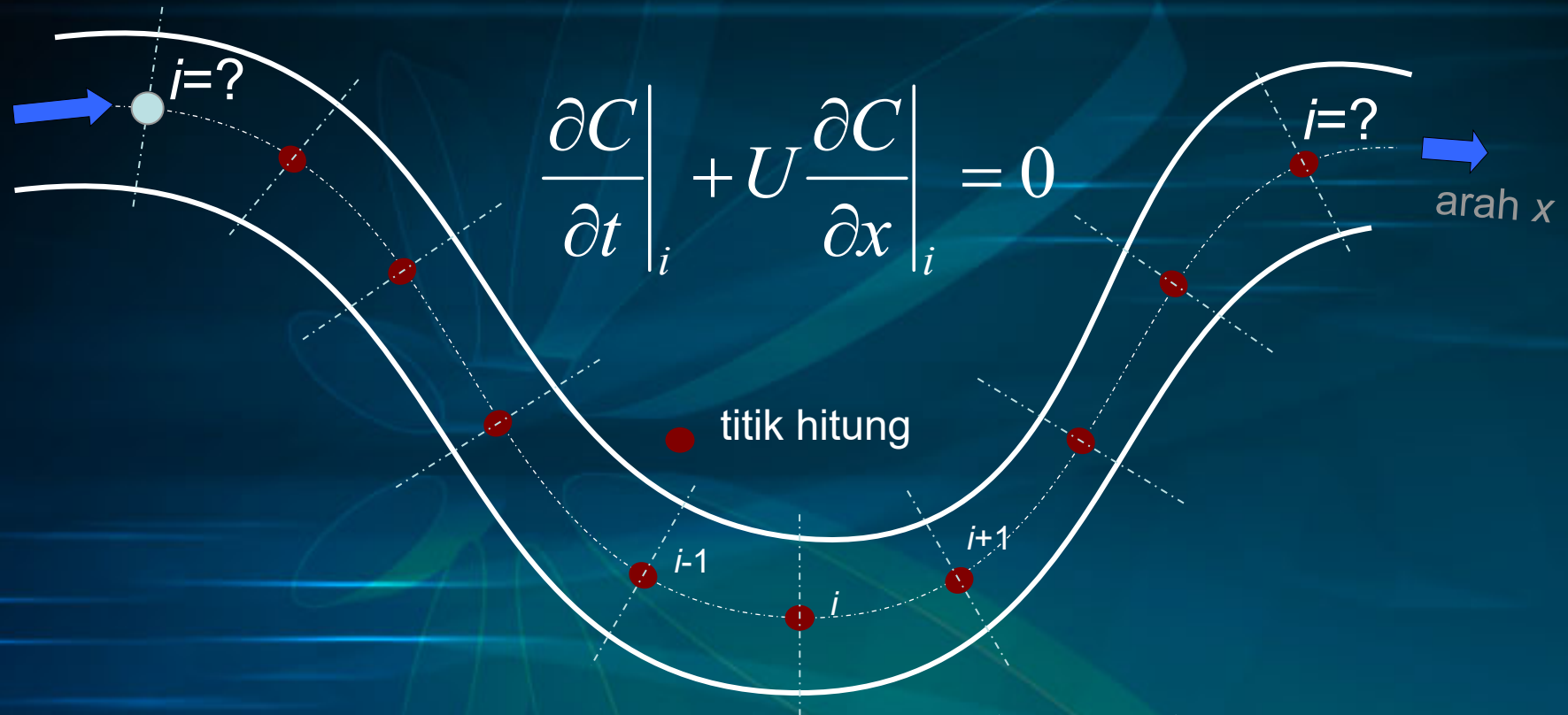
- Aplikasi Skema Maju terhadap Pers. Kerja Adveksi Limbah:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_i + U \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_i = 0$$

adalah:
$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + U \frac{C_{i+1}^n - C_i^n}{\Delta x} = 0$$

sehingga:
$$C_i^{n+1} = \left(1 + \frac{U \Delta t}{\Delta x} \right) C_i^n - \frac{U \Delta t}{\Delta x} C_{i+1}^n$$
$$= (1 + Cr) C_i^n - Cr C_{i+1}^n \quad i = ?$$

Aplikasikan ke saluran/sungai

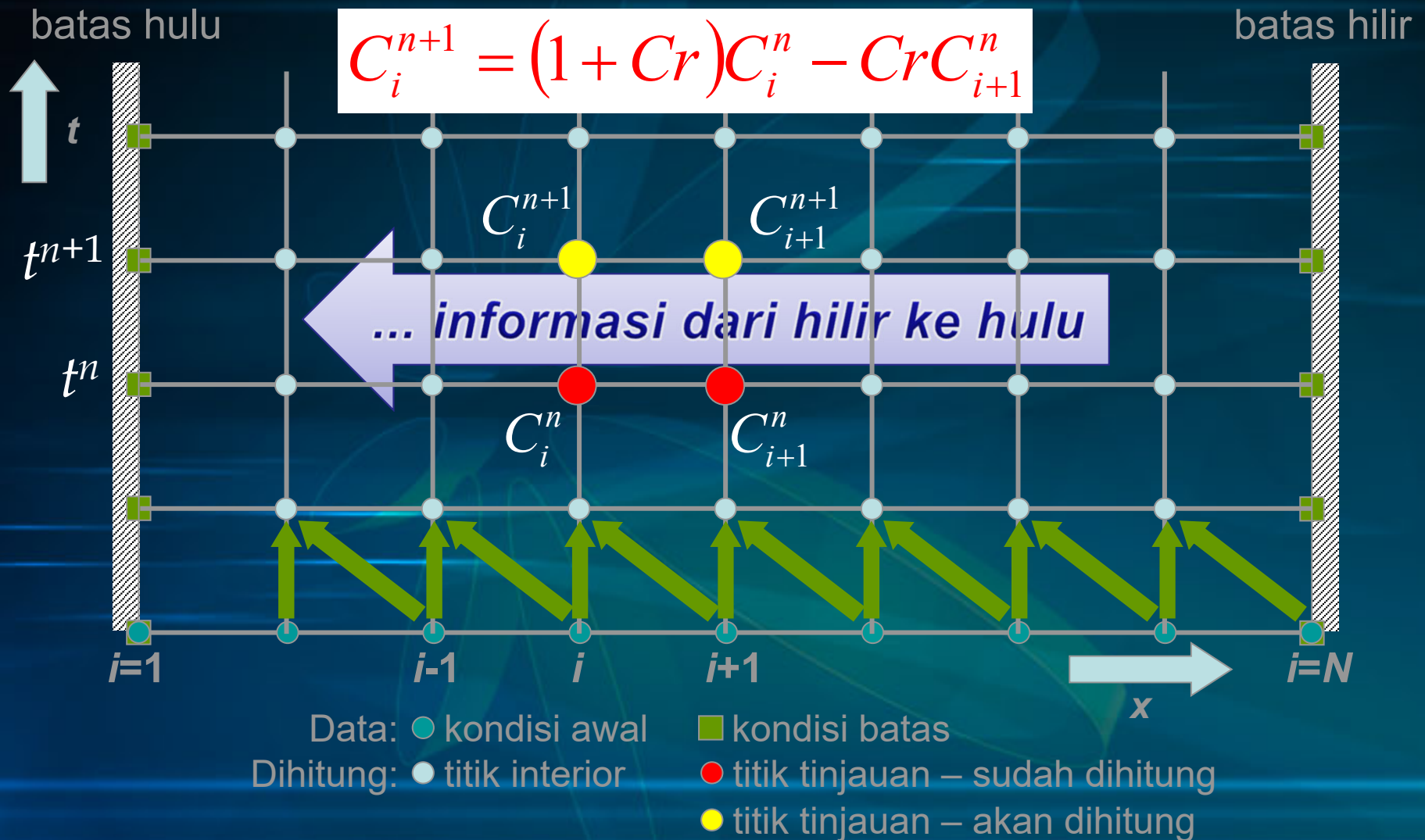


$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + U \frac{C_{i+1}^n - C_i^n}{\Delta x} = 0$$

$$C_i^{n+1} = \left(1 + \frac{U \Delta t}{\Delta x} \right) C_i^n - \frac{U \Delta t}{\Delta x} C_{i+1}^n$$

$$= (1 + Cr) C_i^n - Cr C_{i+1}^n \quad i = ?$$

Visualisasi Skema Maju Eksplisit



Aplikasi Skema Maju - Implisit

- Aplikasi Skema Maju terhadap Pers. Kerja Adveksi Limbah:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_i + U \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_i = 0$$

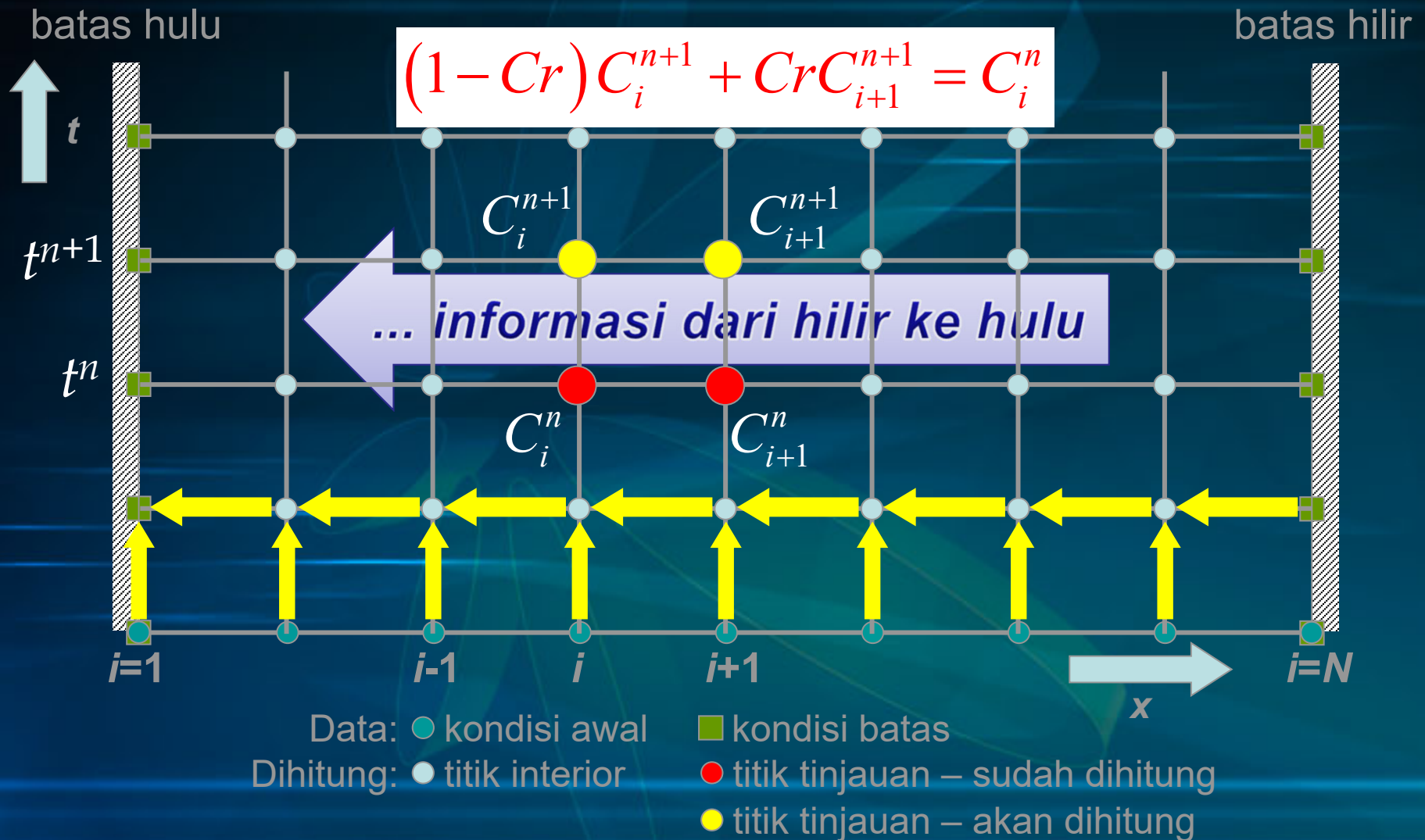
adalah:
$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + U \frac{C_{i+1}^{n+1} - C_i^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

sehingga:

$$\left(1 - \frac{U \Delta t}{\Delta x} \right) C_i^{n+1} + \frac{U \Delta t}{\Delta x} C_{i+1}^{n+1} = C_i^n$$

$$(1 - Cr) C_i^{n+1} + Cr C_{i+1}^{n+1} = C_i^n \quad i = ?$$

Visualisasi Skema Maju Implisit



Dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix}
 1-Cr & Cr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 C_1^{n+1} \\
 C_2^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_{i-1}^{n+1} \\
 C_i^{n+1} \\
 C_{i+1}^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_N^{n+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 C_1^n \\
 C_2^n \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_{i-1}^n \\
 C_i^n \\
 C_{i+1}^n \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 KB_{hi}^{n+1}
 \end{bmatrix}$$

- Bentuk matriksnya khusus yaitu matriks pita. Penyelesaian matriks ini menggunakan teknik-teknik numerik khusus.

Dalam bentuk matriks

- Agar Kondisi Batas Hulu juga terpenuhi, dapat dilakukan sbb:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-Cr & Cr \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 C_1^{n+1} \\
 C_2^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_{i-1}^{n+1} \\
 C_i^{n+1} \\
 C_{i+1}^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_N^{n+1}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 KB_{hu}^{n+1} \\
 C_2^n \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_{i-1}^n \\
 C_i^n \\
 C_{i+1}^n \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 KB_{hi}^{n+1}
 \end{Bmatrix}$$

Skema Maju untuk Adveksi murni

- Dari matriks di depan dapat dilihat bahwa:
 - walaupun kondisi batas hulu telah diaplikasikan, namun tetap tidak ada pengaruhnya pada penyelesaian,
 - namun kondisi batas hilir berpengaruh kepada penyelesaian dengan skema maju,
 - artinya skema maju seperti ini tidak cocok untuk permasalahan angkutan limbah murni adveksi; karena seharusnya permasalahan semacam ini sangat dipengaruhi oleh kondisi batas hulu bukan hilir.
- Bandingkan dengan Skema Mundur yang akan dijelaskan pada tayangan selanjutnya.

Aplikasi Skema Mundur - Eksplisit

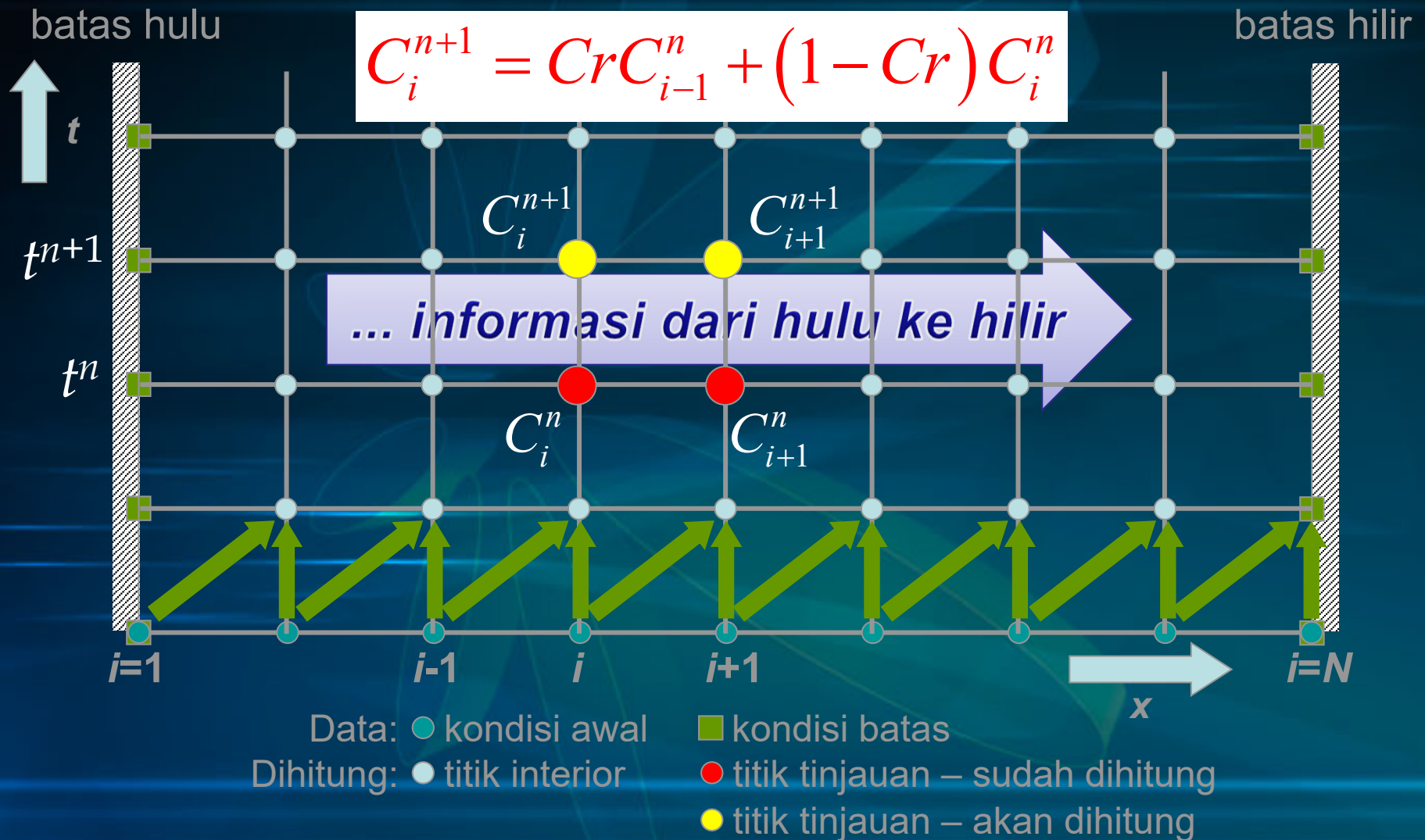
- Aplikasi Skema Mundur terhadap Pers. Adveksi Limbah:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_i + U \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_i = 0$$

adalah:
$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + U \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

sehingga:
$$C_i^{n+1} = \frac{U \Delta t}{\Delta x} C_{i-1}^n + \left(1 - \frac{U \Delta t}{\Delta x} \right) C_i^n$$
$$= Cr C_{i-1}^n + (1 - Cr) C_i^n \quad i = ?$$

Visualisasi Skema Mundur Eksplisit



Aplikasi Skema Mundur - Implisit

- Aplikasi Skema Mundur terhadap Pers. Adveksi Limbah:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial t} \right|_i + U \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_i = 0$$

adalah:
$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + U \frac{C_i^{n+1} - C_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0$$

sehingga:

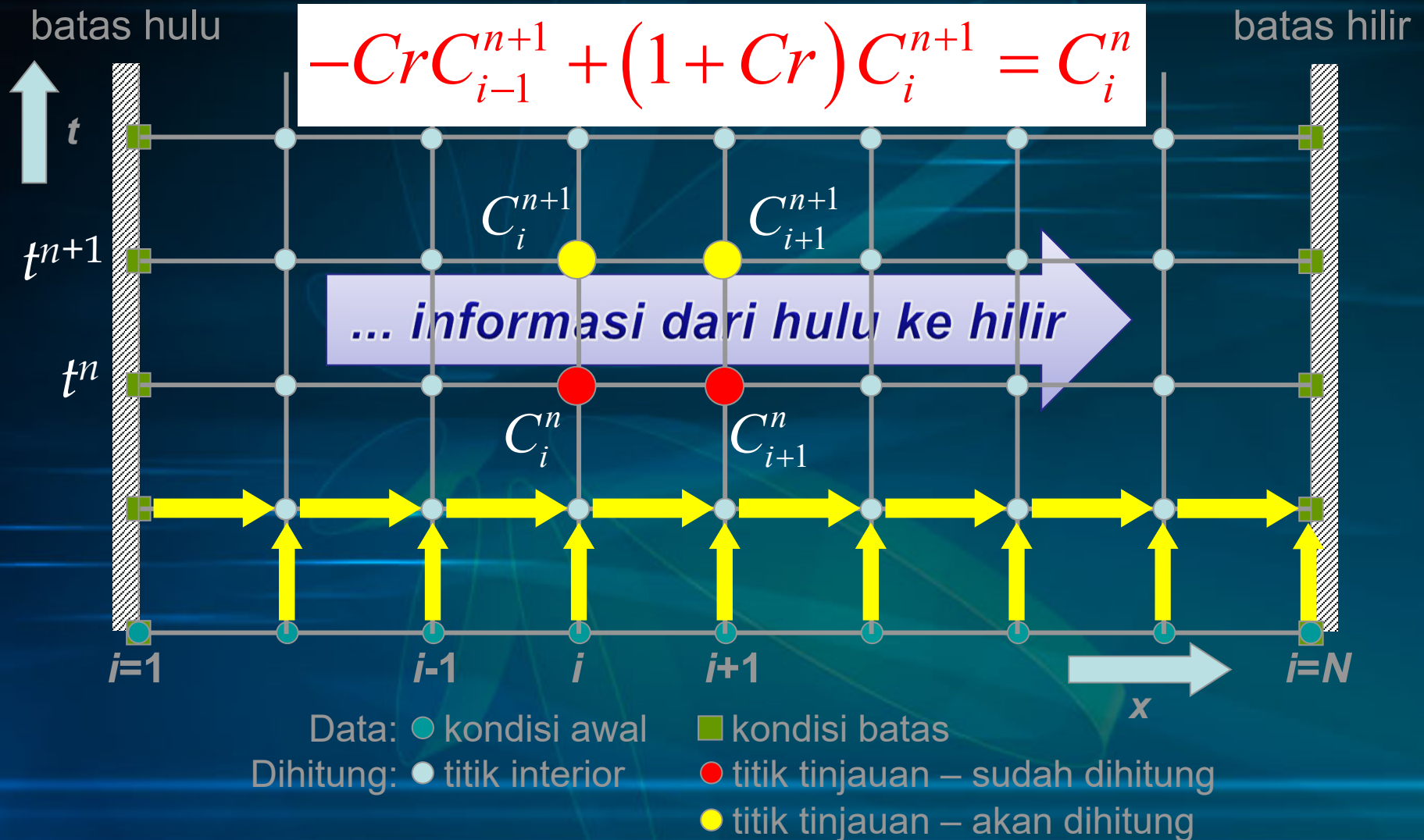
$$-CrC_{i-1}^{n+1} + (1 + Cr)C_i^{n+1} = C_i^n \quad i = ?$$

Dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -Cr & 1+Cr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -Cr & 1+Cr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -Cr & 1+Cr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -Cr & 1+Cr & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr & 1+Cr & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr & 1+Cr & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr & 1+Cr & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr & 1+Cr & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr & 1+Cr
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 C_1^{n+1} \\
 C_2^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_{i-1}^{n+1} \\
 C_i^{n+1} \\
 C_{i+1}^{n+1} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_N^{n+1}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 KB_{hu}^{n+1} \\
 C_2^n \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_{i-1}^n \\
 C_i^n \\
 C_{i+1}^n \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 C_N^n
 \end{Bmatrix}$$

- Dalam kasus *Skema Mundur*: kondisi batas hulu memang dibutuhkan, sehingga skema ini lebih cocok untuk adveksi murni dibandingkan *Skema Maju*.

Visualisasi Skema Mundur Implisit



Skema Maju vs Mundur

- Tampak dari penjelasan di depan bahwa:
 - pada Skema Maju informasi berjalan dari hilir ke arah hulu,
 - sedangkan pada Skema Mundur informasi berjalan dari hulu ke arah hilir.
- Oleh karena itu, nanti akan tampak pengaruhnya kedua karakteristik dari masing-masing skema di atas terhadap penyelesaian persamaan Adveksi Murni.

Skema Eksplisit vs Implisit

- Untuk skema eksplisit, persamaan aljabarnya dapat diselesaikan secara langsung → lebih mudah, kurang akurat.
- Untuk skema implisit menghasilkan sebuah sistem persamaan linier yang harus diselesaikan secara serentak dengan metoda matriks → rumit, tetapi lebih akurat.